

Semaine 10 - 2024

Flambage des poutres

CHAPITRE 11 de Gere and Goodno

PARTIE 1: (slide 3 - 20)

Flambage – modèle Euler par equ. différentielle

PARTIE 2: (slide 21 - 33)

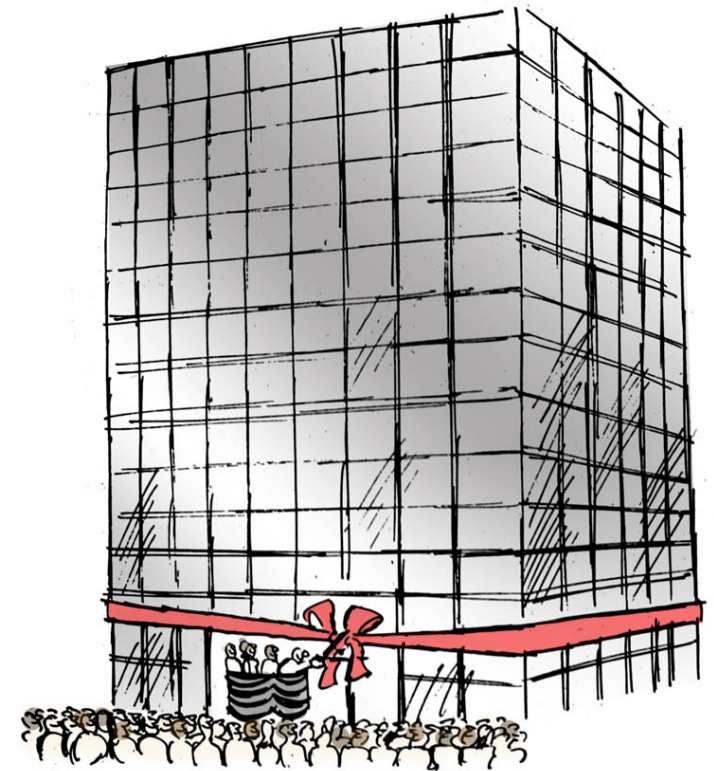
Défaillance (*failure*)

PARTIE 3: (slide 34 - 47)

Bistabilité

PARTIE 4: (slide 48 - 56)

Charges excentriques



PROGRAMME DU COURS, semaines 7-10

6	15.10	Force internes dans les poutres non-déformées. Méthode Section et différentielle	
6	17.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure Moment d'inertie	Série 6
7	29.10	Charge axiale. Poutre composite	Série 6
7	31.10	Quiz + Session questions & réponses	Série 1-5
8	05.11	Examen mi-semester	
8	07.11	Flèche des poutres	Série 7
9	12.11	Flèche pour guidage flexible	Série 8a
9	14.11	Systèmes indéterminés	Série 8b
10	19.11	Flambage	Séries 9
10	21.11	Q&A	Série 10

Semaine 10 – partie 1

Objectifs d'apprentissage

- Savoir définir le flambage dans une poutre, et ses conséquences
- Pouvoir Calculer la force F_{cri} critique pour flambage, en fonction des supports

buckling

Flambage

$$\sigma_{\text{flambage}} \ll \sigma_{\text{max, matériau}}$$

- Le flambage: une instabilité qui se produit lorsqu'une poutre subit une déformation large et soudaine sous une charge compressive beaucoup plus petite que la charge nécessaire pour atteindre la contrainte maximum ($\sigma_{\text{flambage}} \ll \sigma_{\text{max}}$)
- Cette défaillance est liée à une déflexion dans une direction perpendiculaire à la charge

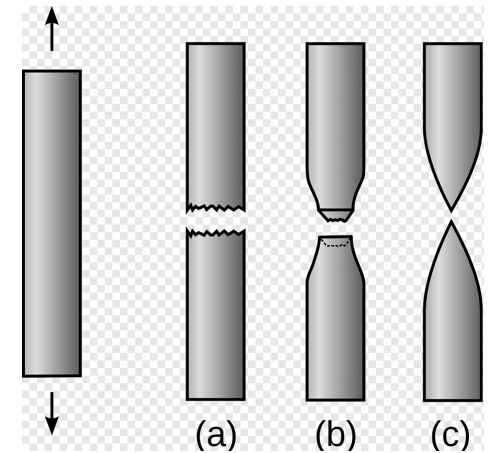


Ici, cylindre creux et non une poutre, mais c'est du flambage quand même !

On pense souvent à la contrainte max pour la rupture d'un matériau.

Mais le flambage demande un autre type de réflexion:
flambage mène:

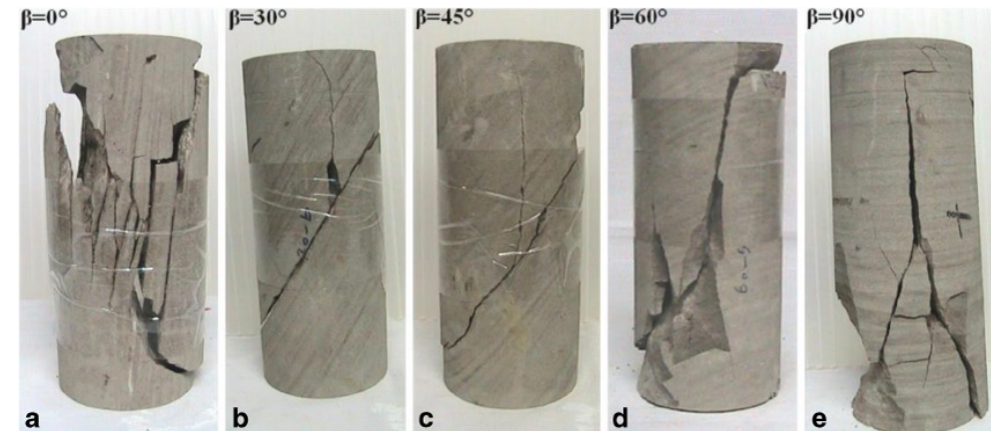
- une défaillance de la structure (ne soutient plus les charges)
- à de grandes contraintes,
- et donc à une rupture (ou déformation plastique)



Failure under static load



Failure under impact load



Exemple de flambage catastrophique: suite au flambage, de grandes déformations et des contraintes énormes, et rupture

Buckling of a water-reservoir's columns

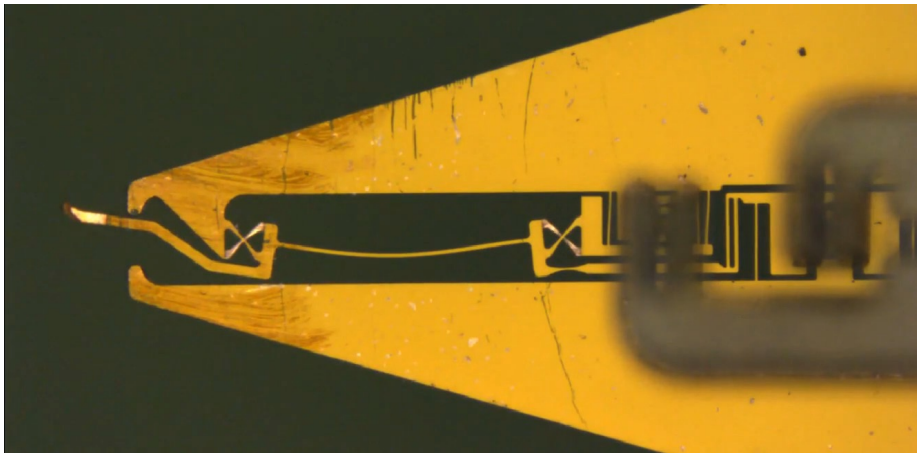


Après flambage, le support ne peut plus soutenir la charge du réservoir d'eau

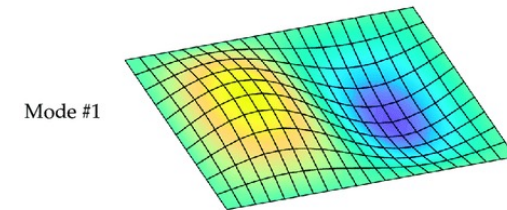
Structure mince et légère, conçue pour charge vertical

Exemple de flambage sans défaillance structurale

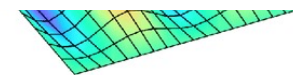
- Pour l'avion à droite, c'est la structure sous-jacente qui est assez rigide pour résister aux contraintes
- Pour la pièce usinée en verre avec des guidages flexibles ci-dessous, le flambage est bi-stable et « enlève la charge »



Y. Bellouard / S. Henein



<https://theaviationist.com/2019/11/20/lets-talk-about-the-b-52-strategic-bombers-characteristic-skin-wrinkles/>

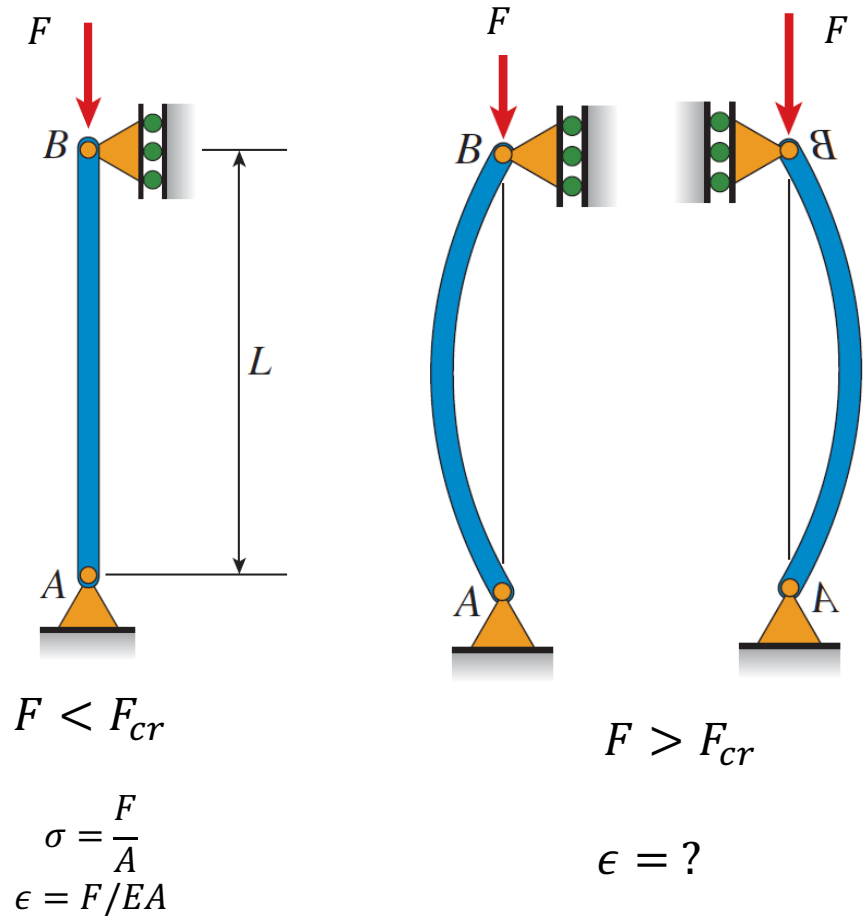


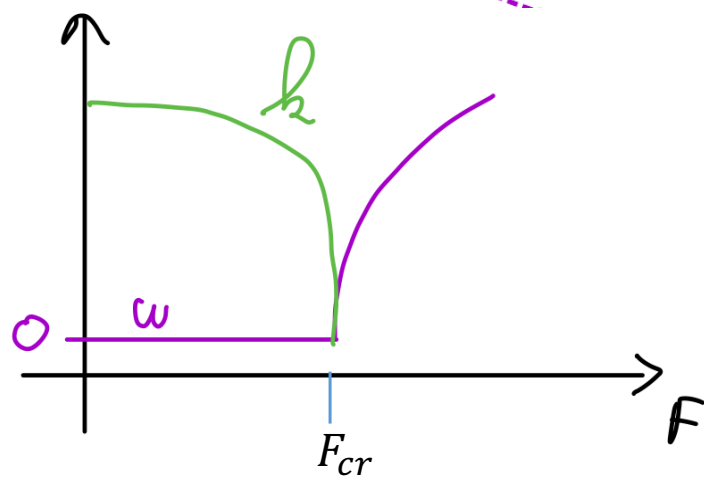
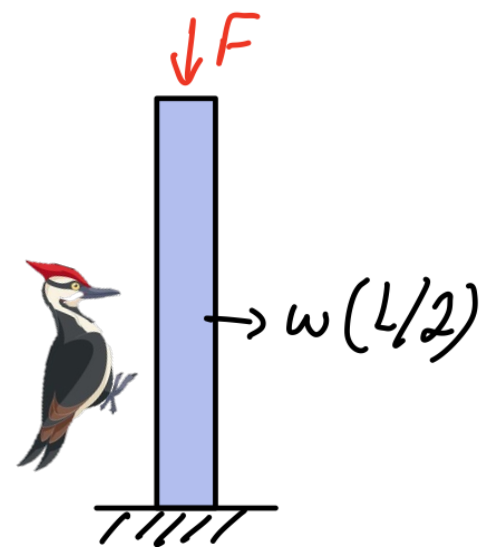
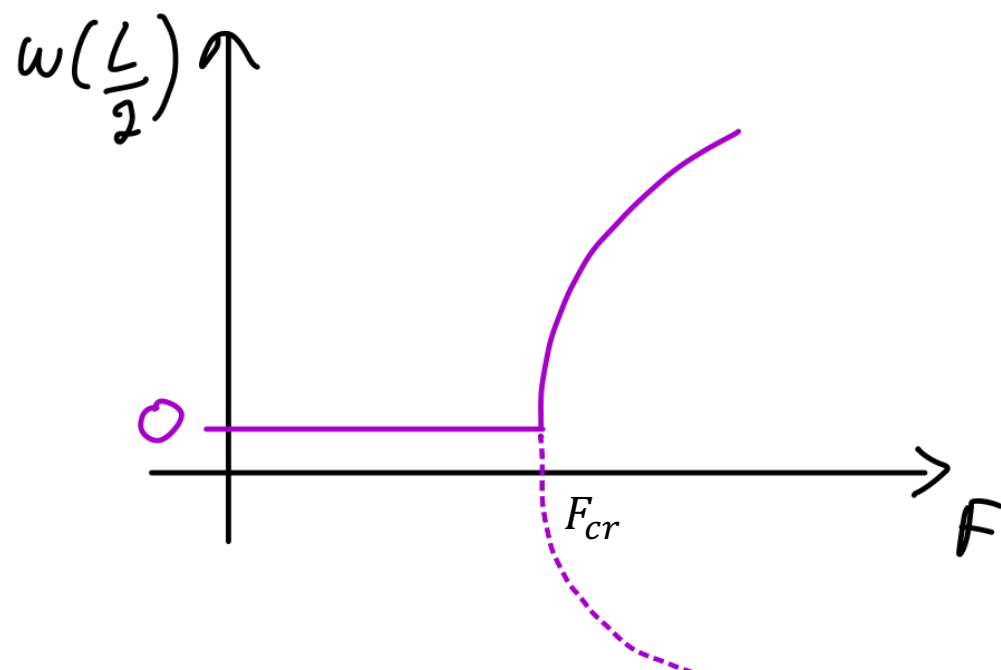
<https://www.mdpi.com/1996-1944/12/8/1262>

Flambage d'une poutre (charge purement axiale)

Deux régimes de déformation lorsqu'une poutre est chargée en compression:

- $F < F_{cr}$: Quand la charge axiale est petite, le changement de longueur sera simplement dû à la contrainte compressive.
- $F > F_{cr}$ Si la charge axiale dépasse une charge critique F_{cr} , la poutre devient instable et toute perturbation entraînera un flambage (la poutre se plie).
 - Dès qu'elle plie, la poutre risque fort de se casser car les contraintes (σ_x) peuvent dépasser les seuils critiques, avec très grande flèche
 - Cas (bi)stable: poutre qui flambe avec une course limitée

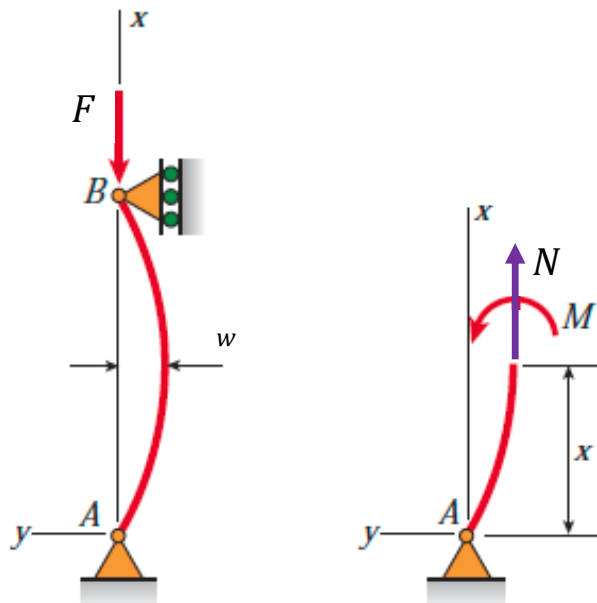




Flambage- modèle Euler

Pour des poutre non-encastées (*pinned-pinned*). Force centrées

- Nous pouvons dériver le modèle Euler pour la force critique de flambage en utilisant la méthode des sections (couper la poutre).



$$N = -F$$

$$M_z(x) = -F w(x)$$

!! $M(x)$ dépend de $w(x)$!!

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{F}{EI} w(x)$$

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

Flambage- modèle Euler

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

Conditions aux bord

1- $w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0,$

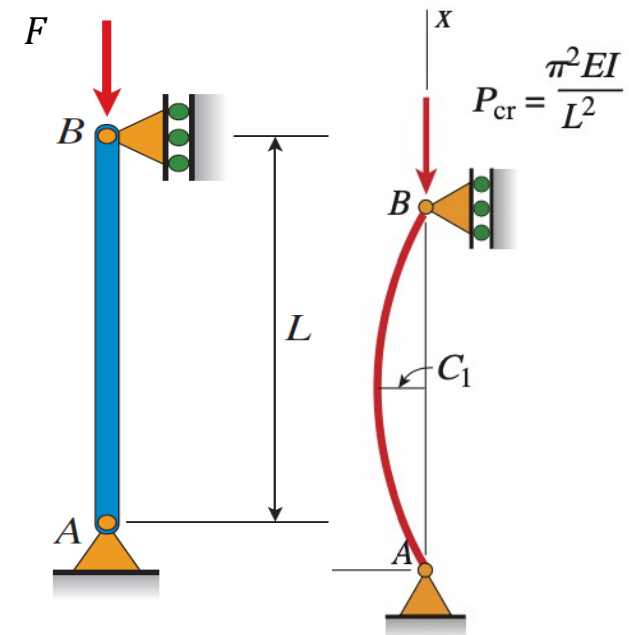
$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

2- $w(L) = 0$

$$\rightarrow C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) = 0$$

- Soit $C_1 = 0$, et la poutre reste droite $w(x)=0$

-Soit $\sqrt{\frac{F}{EI}} L = n\pi$ et $w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$



$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

Flambage- modèle Euler

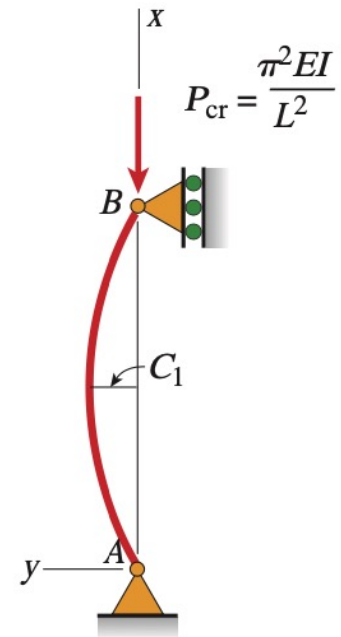
$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

Si $F < F_{crit}$, $C_1 = 0$ et la poutre sera droite

Si $F = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$ la poutre se déformera

Et si $F > \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI$???



Nous ne connaissons pas C_1 : nous savons que la poutre se déforme, mais pas encore de combien. C_1 peut être négatif

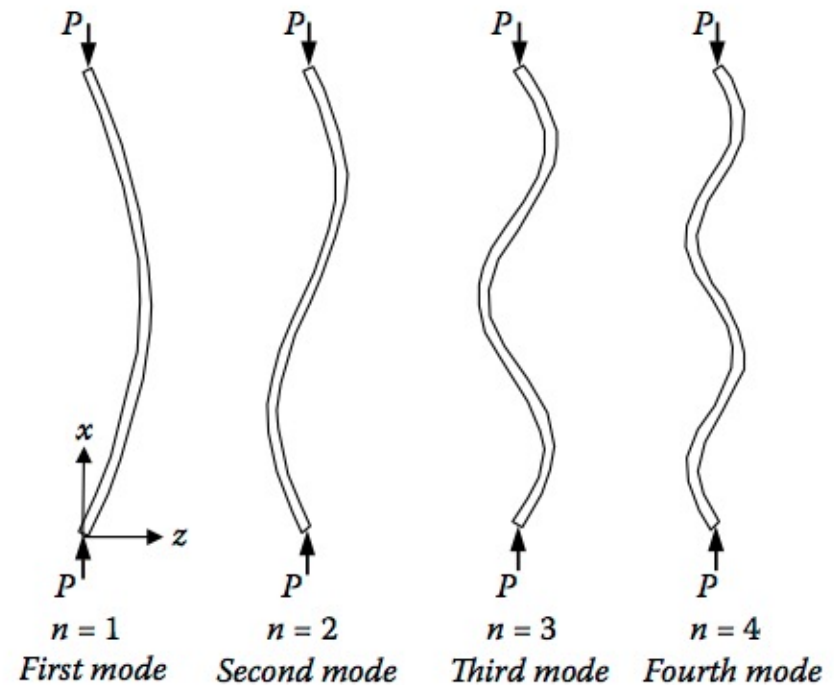
(mais voir slide 16 et 356)

Flambage- modèle Euler

- L'équation différentielle comporte une infinité de solutions
- Il en résulte plusieurs modes de flambage
- On ne peut atteindre les modes $n > 1$ que si des supports bloquent certains modes

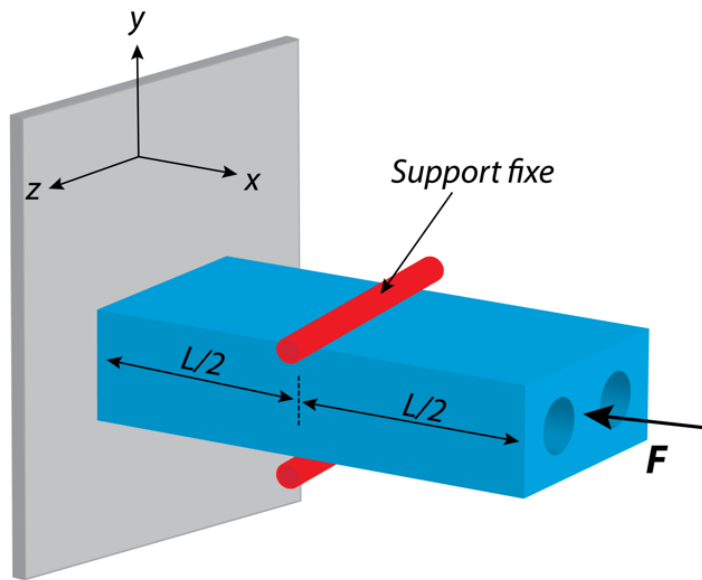
$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{A}$$



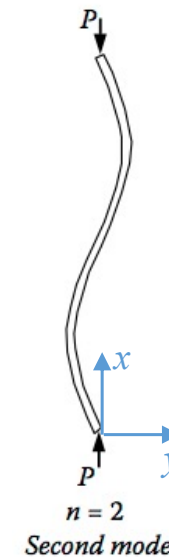
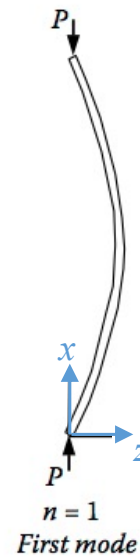
$$F_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI < F_2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 EI < F_3 = \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 EI < F_4 = \left(\frac{4\pi}{L}\right)^2 EI$$

Exemple de modes de flambage



$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

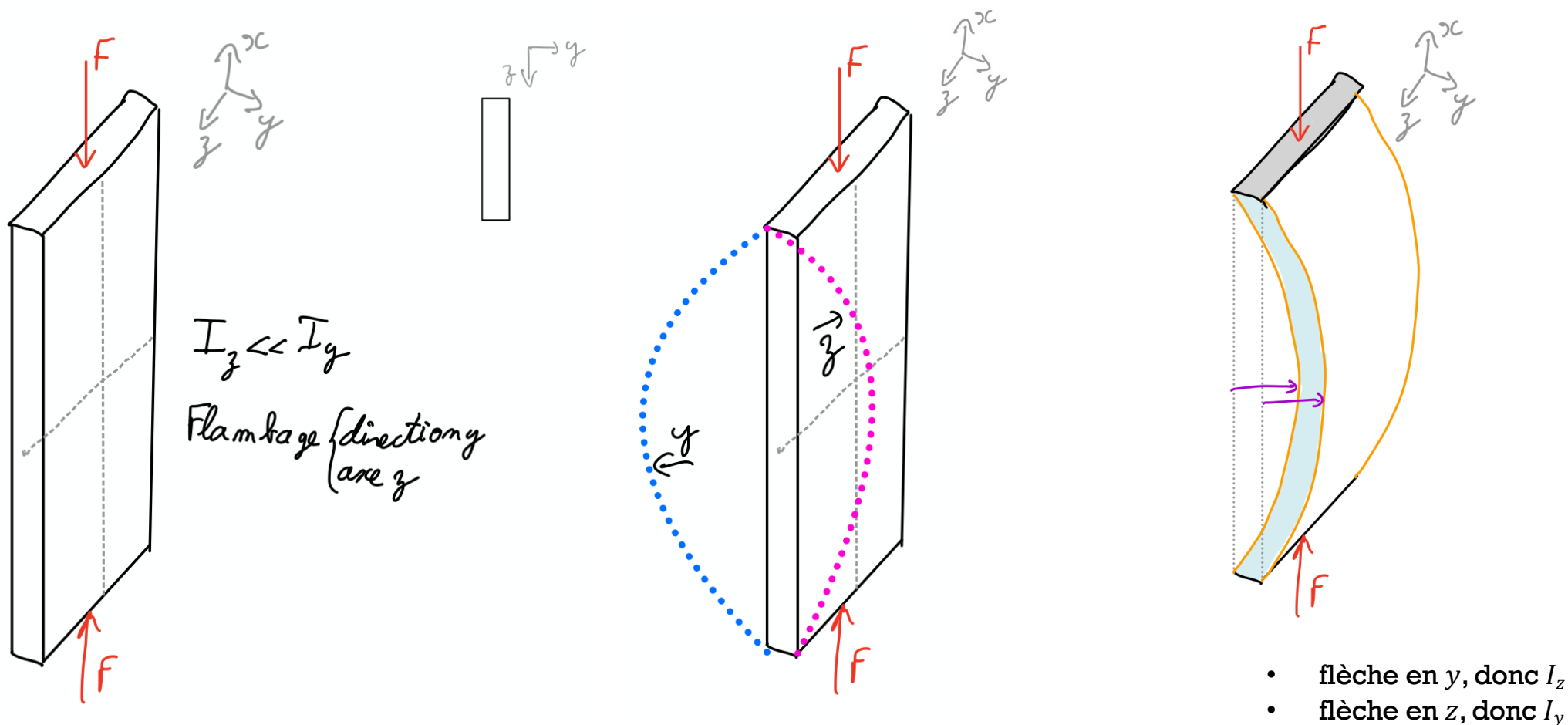
- Le support rouge bloque le mode $n=1$ selon la direction y , mais permet $n=2$. (selon y , donc I_z)
- Le support rouge ne bloque pas le mode $n=1$ selon la direction z , $n=1$ est permis. (selon z , donc I_y)



Quel Axe de flambage?

$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E I_{z\text{-ou-}y}$$

La poutre pliera selon l'axe avec le plus petit I : il faut comparer I_z et I_y



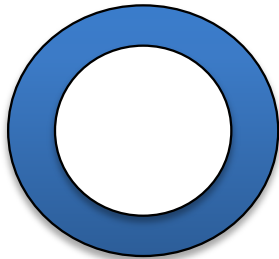
Quelle poutre supportera la plus grande charge avant flambage? (n=1)

$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

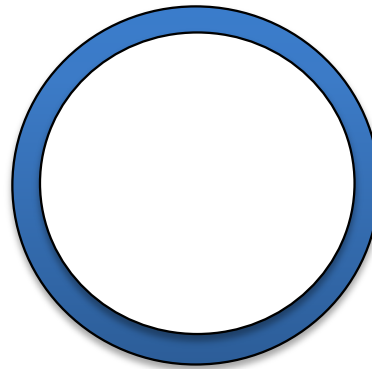
- A. D
- B. 2D
- C. 3D



Diamètre D

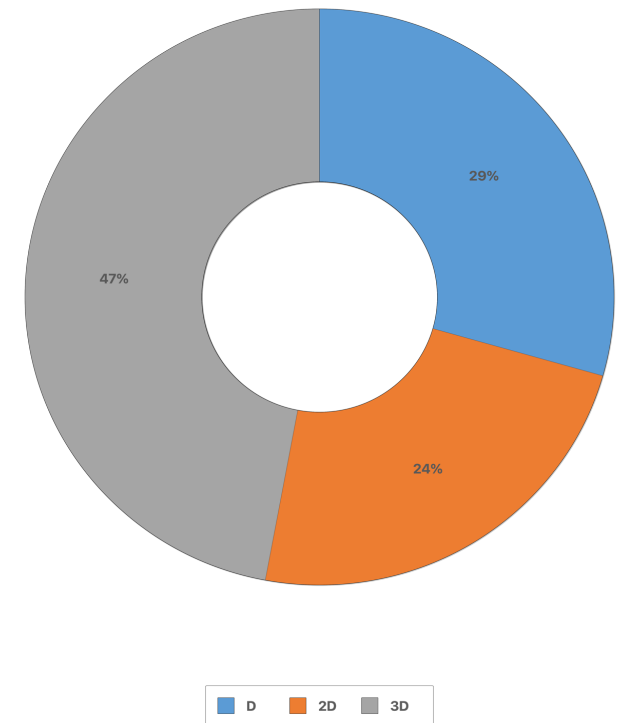


Diamètre 2D



Diamètre 3 D

Mêmes section A, mêmes longueur L



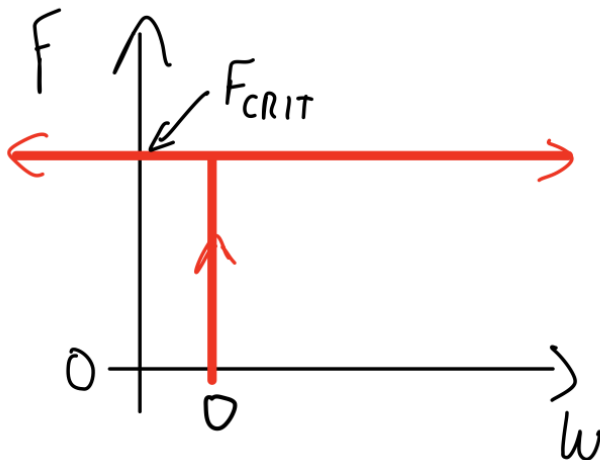
Que vaut C_1 ?

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right)$$

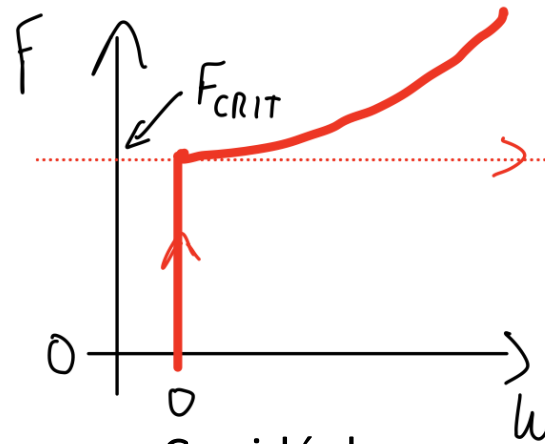
- Notre analyse était limitée aux petits déplacements, car nous avons utilisé l'approximation de $\kappa = w''$ pour la courbure

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

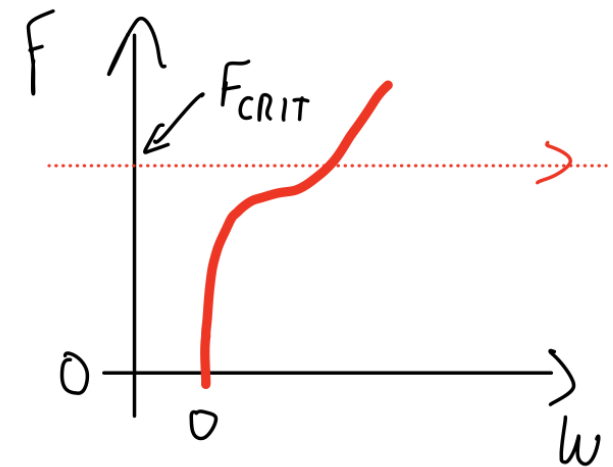
- Avec cette simplification, C_1 est indéfini



Cas idéal simplifié



Cas idéal sans approximation



Cas poutre non-idéale

Flambage - formule d'Euler

- Contrainte et charge critiques: Formule d'Euler (1744) pour le flambage:

$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI \quad \rightarrow \quad \sigma_{crit} = \pi^2 E \left(\frac{nr}{L}\right)^2 ; \quad r^2 = \frac{I}{A}$$

Souvent $n = 1$

- $r = \sqrt{I/A}$: Rayon de Giration (*Radius of gyration*) en [m]. A = section de la poutre
- $\left(\frac{L}{r}\right)$: Coefficient d'élancement (*Slenderness ratio*). Sans unités

- Flèche de la poutre flambée:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

- Attention: pour une force selon x , la poutre peut fléchir selon y ou selon z . C'est autour de l'axe avec le plus petit moment d'inertie qu'il y aura flambage.
- Le moment d'inertie (I_y ou I_z) doit donc être choisi pour « plier » autour de l'axe de flambage z ou selon y .

Rayon de giration r

$r \sim$ épaisseur de la poutre dans le sens du mouvement

■ $r^2 = \frac{I}{A}$

□ $I_z = \frac{ab^3}{12}$ et donc $r_z = \frac{b}{2\sqrt{3}}$

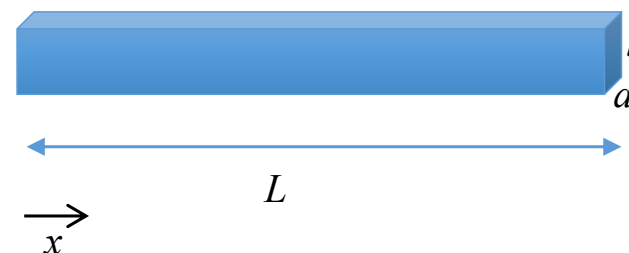
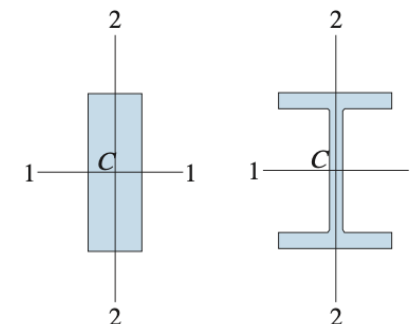
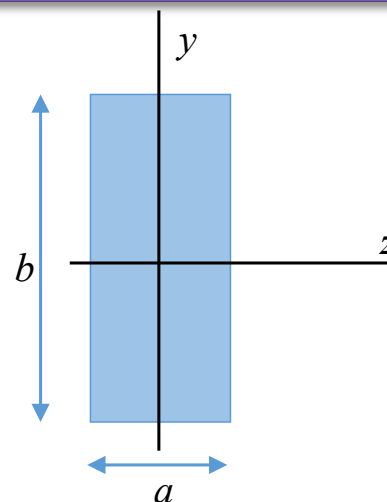
□ $I_y = \frac{ba^3}{12}$ et donc $r_y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

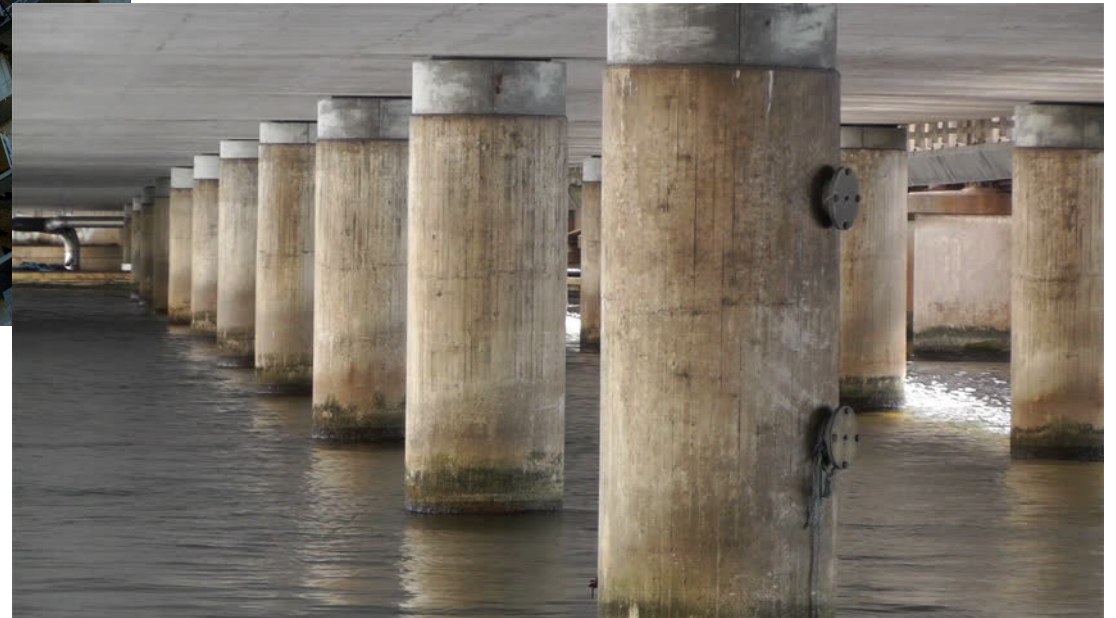
■ $\left(\frac{L}{r}\right)$: Coefficient d'élancement

□ prendre I_x ou I_y qui correspond au bon axe

□ $\frac{L}{r} = \frac{2\sqrt{3}L}{b}$ si flambage selon y

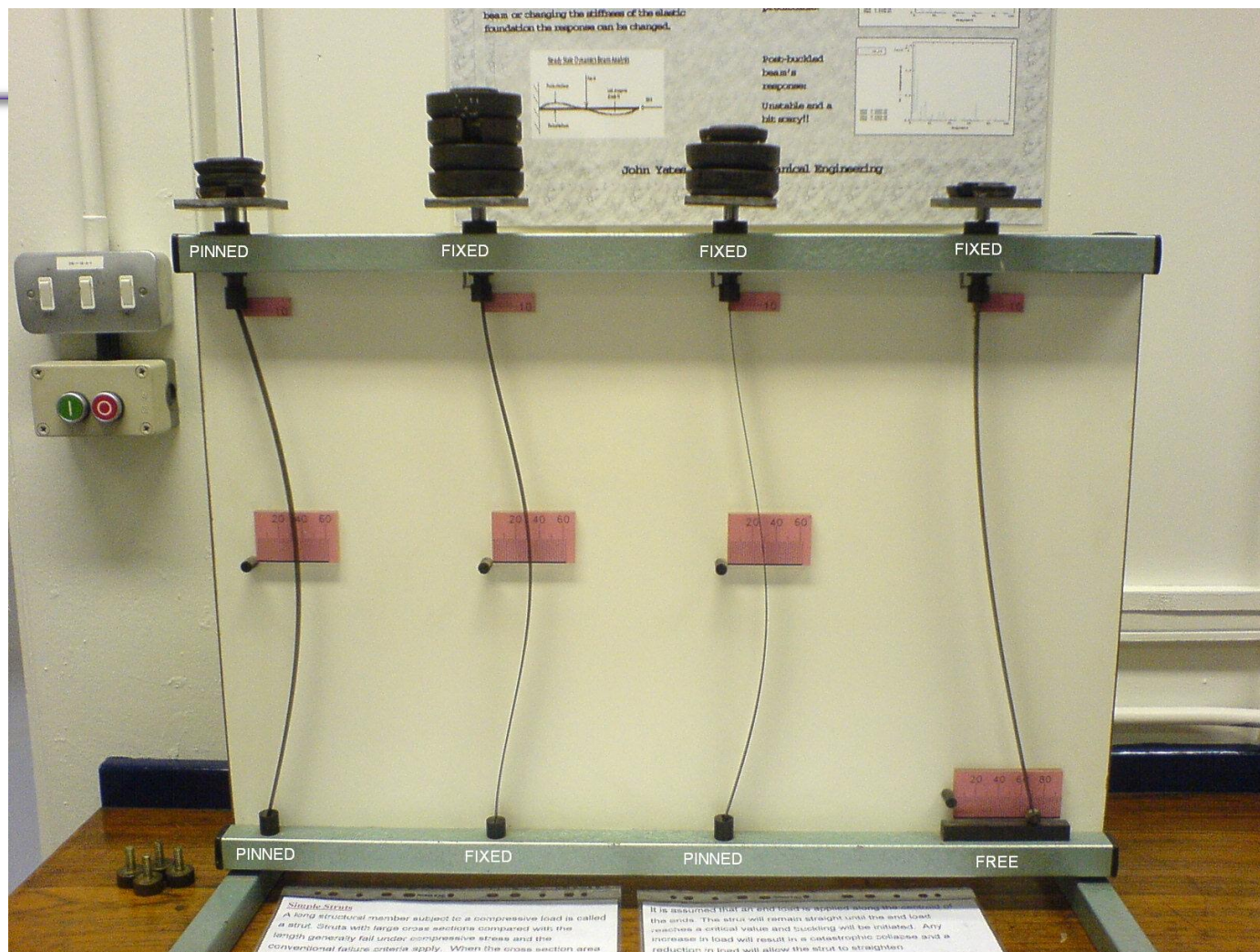
□ $\frac{L}{r} = \frac{2\sqrt{3}L}{a}$ si flambage selon z





Flambage: F_{cr} dépend des supports

Pinned = pivot
Fixed = encastrée
Free = libre



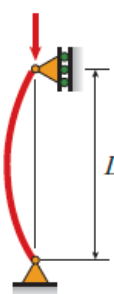
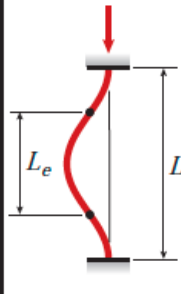
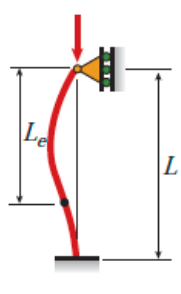
Par Grahams Child —
<http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Buckledmodel.JPG>
 CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1368026>

Flambage: dépend des supports

Longueur effective

- La formule d'Euler peut être généralisée vers d'autres types de supports en utilisant le concept de la longueur effective L_{eff}

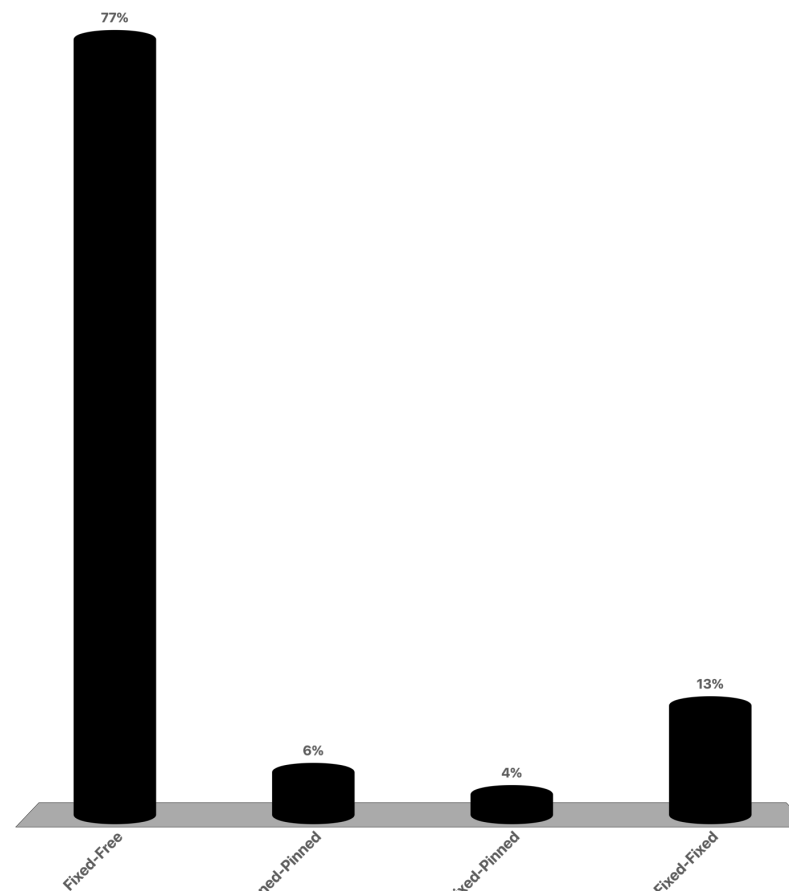
$$F_{cr} = \left(\frac{\pi}{L_{eff}} \right)^2 EI \quad \rightarrow \quad \sigma_{crit} = \pi^2 E \left(\frac{r}{L_{eff}} \right)^2$$

(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$

Pinned = pivot
Fixed = encastrée
Free = libre

4 poutres, mêmes dimensions, différents supports.
On augmente doucement la charge. Laquelle
flambera en premier?

- A. Fixed-Free
- B. Pinned-Pinned
- C. Fixed-Pinned
- D. Fixed-Fixed



Semaine 10 – partie 2

Objectifs d'apprentissage

- Prédire si une poutre va se casser par:
 - i) rupture de matériau
 - ou
 - ii) par flambage (=structurelle)
- Choisir les dimensions d'une poutre pour avoir un facteur de sécurité donné par rapport aux deux modes de défaillance

Défaillance

Matériau ou Flambage?

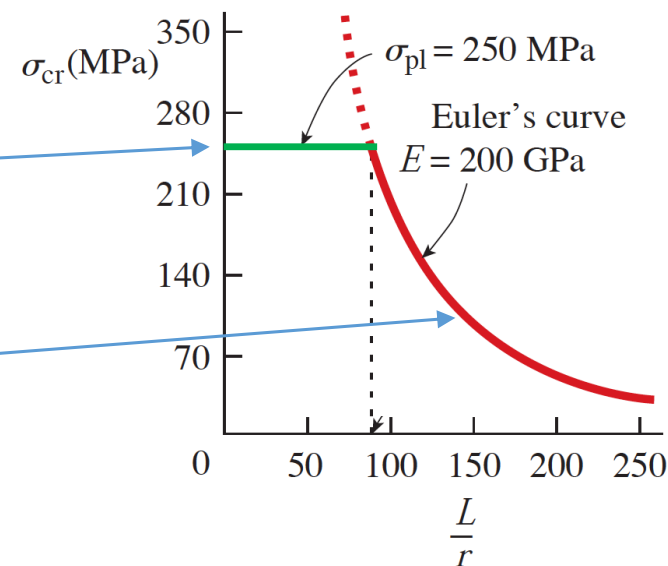
- Sous une charge, une poutre ne tient plus la charge car soit:

- on dépasse la contrainte max pour rupture du matériau $\sigma_{rupture}$ (ne dépend pas de L , mais dépend de A)
- On dépasse la contrainte max pour flambage $\sigma_{flambage}$ (dépend de L et de I). La poutre se plie (puis peut-être se casse)

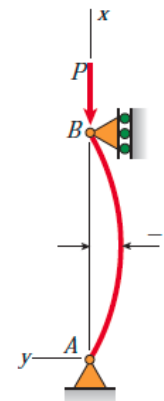
$\sigma_{rupture}$ est une propriété du matériau

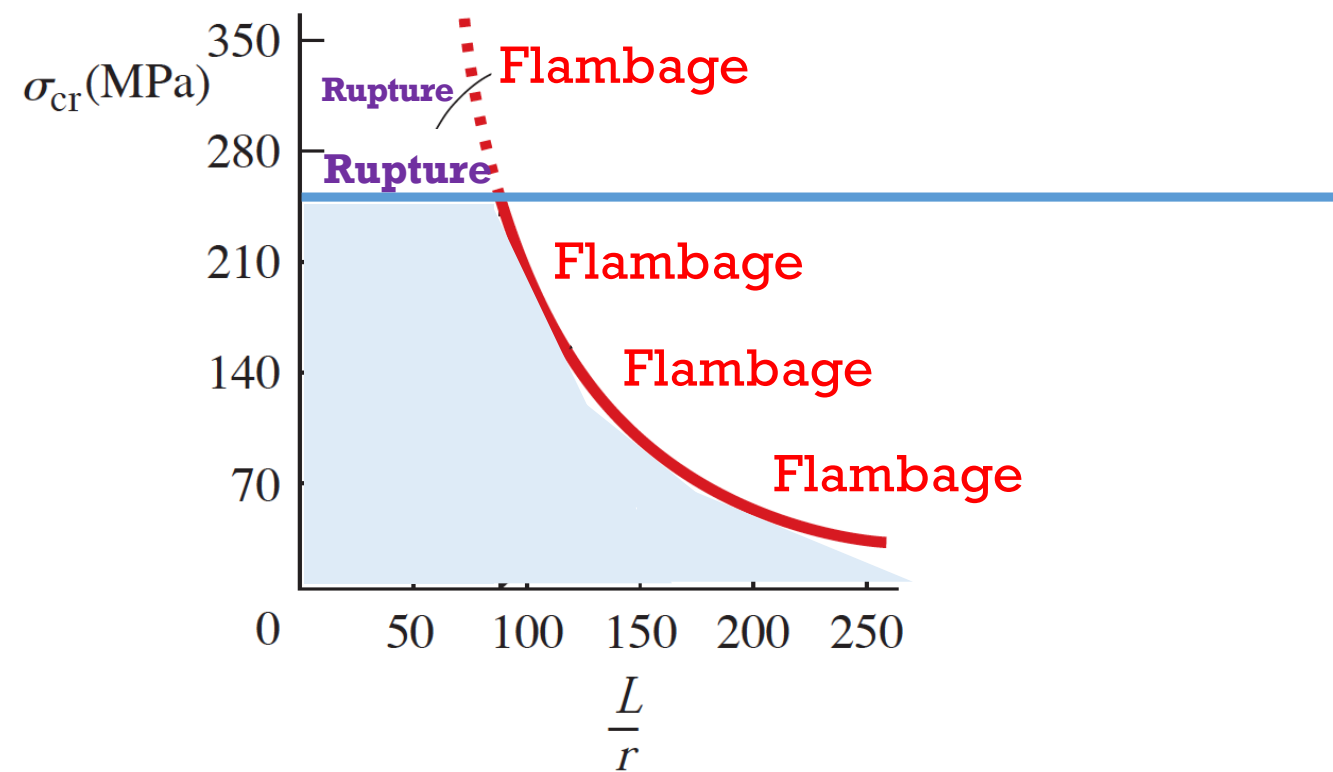
$$\sigma_{flambage} = \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI}{A} \sim \pi^2 E \left(\frac{r}{L}\right)^2$$

Graph of Euler's curve [from Eq. (11-19)] for structural steel with $E = 200$ GPa and $\sigma_{pl} = 250$ MPa



(Gere and Goodno chapitre 11)

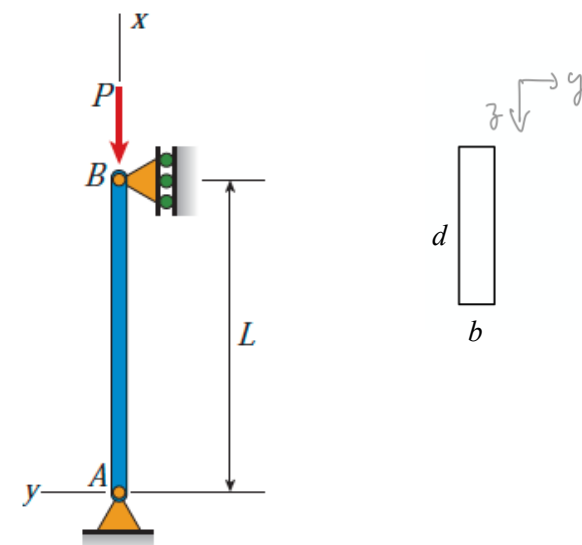




Exemple F1

Flambage et facteur de sécurité.

- Poutre de section rectangulaire, support “Pinned-Pinned” (pivot-pivot)
- $b = 12 \text{ cm}$, $d = 50 \text{ cm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_{Yield} = 250 \text{ MPa}$.
 - a) Pour une longueur $L = 5 \text{ m}$, quelle est la charge max axiale pour un facteur de sécurité $SF=2$?
 - b) Si la colonne est soumise à une charge axiale $F=79 \text{ kN}$, quelle est la longueur maximale, pour $SF=2$?
 - c) Pour les deux cas, quelle sera la direction de la flexion (direction axe y ou z)?



Exemple F1

Flambage et facteur de sécurité.

a) **L=5 m. Trouver Charge $F_{\max}$: Défaillance du matériau ou défaillance structurelle?**

Critère Défaillance du matériau:

$$SF = 2 = \frac{\sigma_{\text{défaill}}}{\sigma_{x,\max}} \quad \text{c'est à dire} \quad \sigma_{x,\max} = \frac{\sigma_{\text{défaill}}}{2}$$

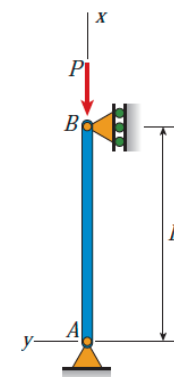
$$F_{\max, \text{Matériau}} = \sigma_{x,\max} A = \frac{\sigma_{\text{défaill}}}{2} A = 7.5 \text{ MN}$$

$F_{\max, \text{Matériau}}$ ne dépend pas de L

Critère Défaillance structurelle (flambage):

$$SF = 2 = \frac{F_{\text{crit,flamb}}}{F_{\max,flamb}}$$

$$F_{\max, \text{Flamb}} = \frac{F_{\text{crit,Flamb}}}{2}$$



Exemple F1

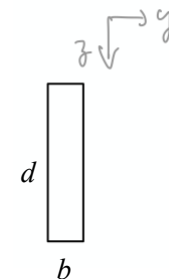
Flambage et facteur de sécurité.

$$F_{max,Flamb} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L^2} EI \quad (\text{premier mode})$$

$$= \frac{\pi^2}{L^2} \frac{Eb^3d}{2 \times 12} = 288\pi^2 \text{ kN} \approx 2.84 \text{ MN}$$

$$I_z = \frac{b^3d}{12}$$

$$I_y = \frac{d^3b}{12}$$



plus facile de plier selon axe z que selon axe y (car $I_z < I_y$ vu que $b < d$)
donc on utilise $I_z = \frac{b^3d}{12}$ car flexion de flambage selon y

On trouve $F_{max,Buckling} < F_{max,Matériau}$ $2.84 \text{ MN} < 7.5 \text{ MN}$

donc **défaillance par flambage et non par rupture pour L=5 m, et charge axiale max de 2.84 MN**

Exemple F1

Flambage et facteur de sécurité.

b) longueur max de la poutre pour F=79 kN ?

79 kN << 7.5 MN, donc ce sera une défaillance par flambage et non par rupture du matériau

Défaillance structurelle (flambage): $SF = 2 = \frac{F_{cr,flambage}}{F_{ext}} \rightarrow F_{ext} = \frac{\pi^2}{2L_{crit}^2} EI$

$$L_{crit} = \sqrt{\pi^2 \frac{EI}{2F}} = \sqrt{\pi^2 \frac{2 \cdot 12^3 \cdot 50 \cdot 10^3}{2 \cdot 12 \cdot 79 \cdot 10^3}} \approx 15 \text{ m}$$

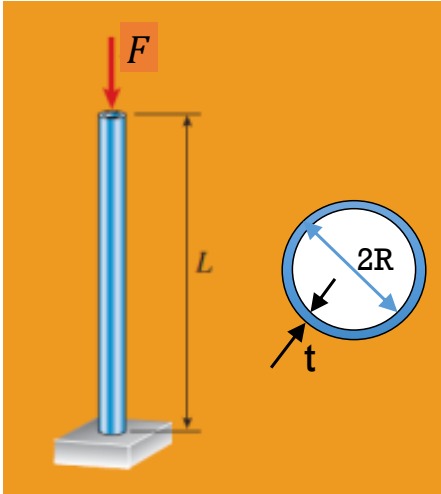
7.7 MN pour rupture
2.84 MN flambage à 5 m
0.079 MN flambage à 15 m

- Dans les deux cas (a et b), la structure se casse par flambage (et non par rupture)
- défaillance en flambage pour une force qui est 100x plus petite que force pour rupture !
- La flexion sera perpendiculaire à la dimension la plus mince de la poutre, ici b et non d .

Exemple F2

Flambage et facteur de sécurité

- Cylindre creux, conditions “encastré – libre” (= “*fixed-free*”). Donc $L_{eff} = 2L$
- $R = 7.07 \text{ cm}$, $L = 3.1416 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_{y,max} = 250 \text{ MPa}$
- Trouver l'épaisseur minimum t_{min} de la paroi pour supporter une charge de $F=250 \text{ kN}$ avec un facteur de sécurité $SF=2$



on considère les 2 modes de défaillance:

$$SF = \frac{\sigma_{y,max}}{\sigma_{charge}} \geq 2 \quad \text{rupture matériau}$$

$$SF = \frac{\sigma_{cr,flambage}}{\sigma_{charge}} = \frac{F_{crit,flambage}}{F_{charge}} \geq 2 \quad \text{flambage}$$

Exemple F2

Flambage et facteur de sécurité

critère 1:

pas de rupture du matériau
sous la charge de 250 kN

$$\sigma_{charge} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi(R^2 - (R - t)^2)} \approx \frac{F}{2\pi R t}$$

Pour simplifier les maths,
j'ai pris que $\frac{t}{R} \ll 1$
Vous pouvez résoudre
plus correctement sans
cette approximation.

$$SF = \frac{\sigma_{y,max}}{\sigma_{load}} = 2$$

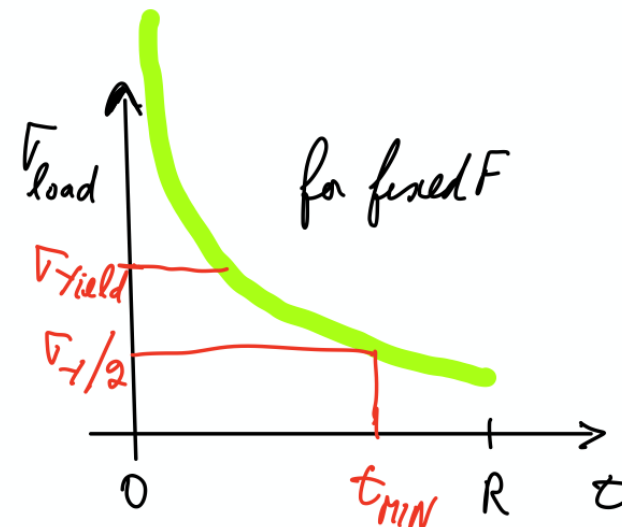
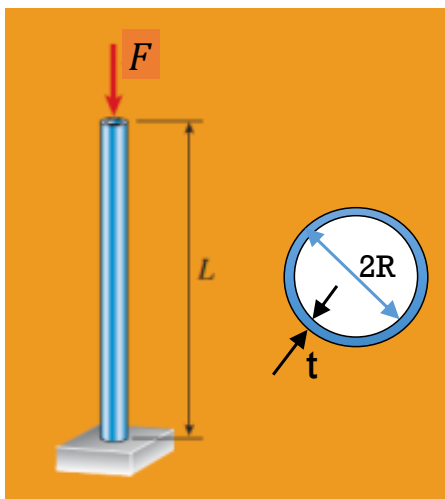
$$\frac{F}{2\pi R t_{min}} = \frac{\sigma_{y,max}}{2}$$

$$t_{min} = F / \pi R \sigma_{y,max}$$

$$t_{min,rupture} = 4 \text{ mm}$$

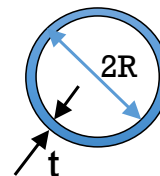
Et en effet $t \ll R$ avec $R = 7.07 \text{ cm}$

Rupture si $t < t_{min}$



Exemple F2

Flambage et facteur de sécurité



critère 2: pas de flambage

$$F_{cr,flambage} = \left(\frac{\pi}{L_{eff}} \right)^2 EI = \frac{\pi^2}{4L^2} E \frac{\pi}{4} (R^4 - (R - t)^4)$$

$$\frac{F_{crit,flambage}}{F_{charge}} \geq 2$$

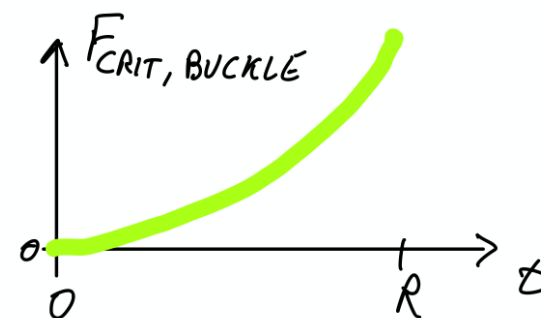
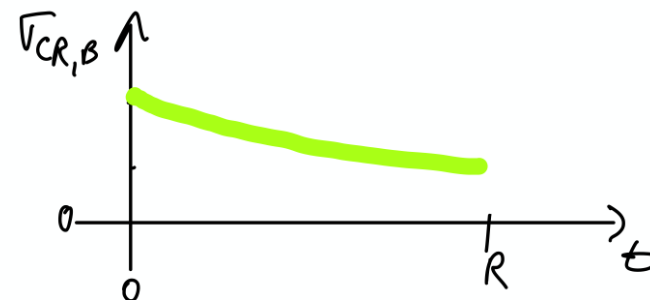
$$\pi^2 \frac{E}{4L^2} \frac{\pi}{4} (R^4 - (R - t)^4) = 2F$$

$$t = R - \sqrt[4]{R^4 - \frac{32FL^2}{\pi^3 E}}$$

$$t_{min,flambage} = 11.5 \text{ mm}$$

$$t_{min,rupture} = 4 \text{ mm}$$

$t_{min,flambage} > t_{min,rupture}$ il faut donc une paroi plus épaisse que 11.5 mm pour résister au flambage



on veut que la contrainte critique pour le flambage soit max 1/2 de la contrainte due au 250 kN pour assurer de ne pas avoir de flambage.

on s'intéresse donc au ratio $\frac{\sigma_{charge}}{\sigma_{cr,Flamb}}$ et non $\frac{\sigma_{y,max}}{\sigma_{cr,Flamb}}$

Quelle poutre supportera la plus grande charge avant flambage?

- A. D
- B. 2D
- C. 3D

- Une paroi mince peut donner un grand I_z pour une faible section, et donc une grande résistance au flambage
- (mais en réalité flambage localisé)

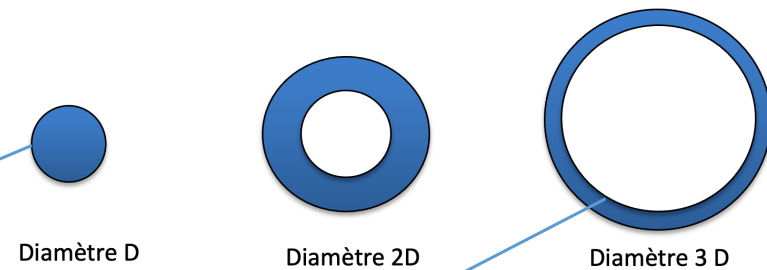
$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{Rayon de giration}$$

- Pour section circulaire pleine

$$r = \frac{R}{2}$$

- Pour section circulaire

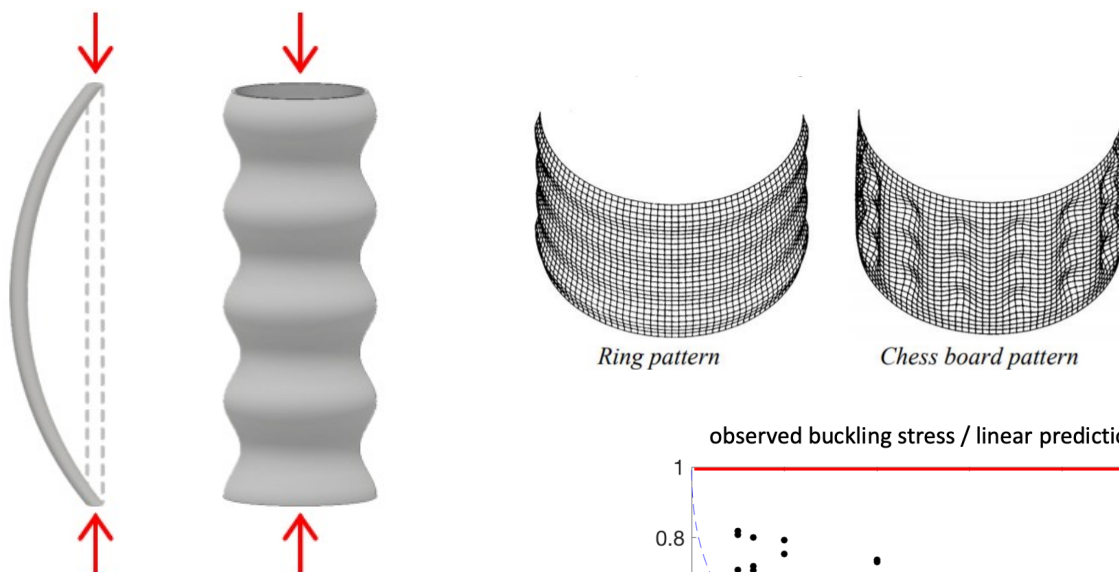
d'épaisseur $t \ll R$ $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$



$$\sigma_{flambage} = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI}{A} = \pi^2 E \left(\frac{r}{L}\right)^2$$

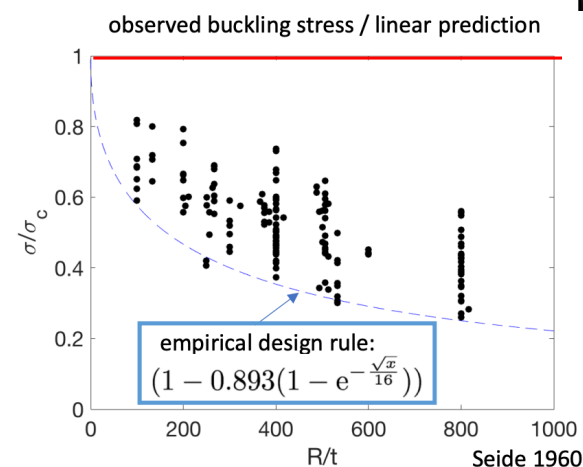
Shell buckling

- Le flambage est aussi un mode de défaillance pour des structures à paroi mince (« shell »)

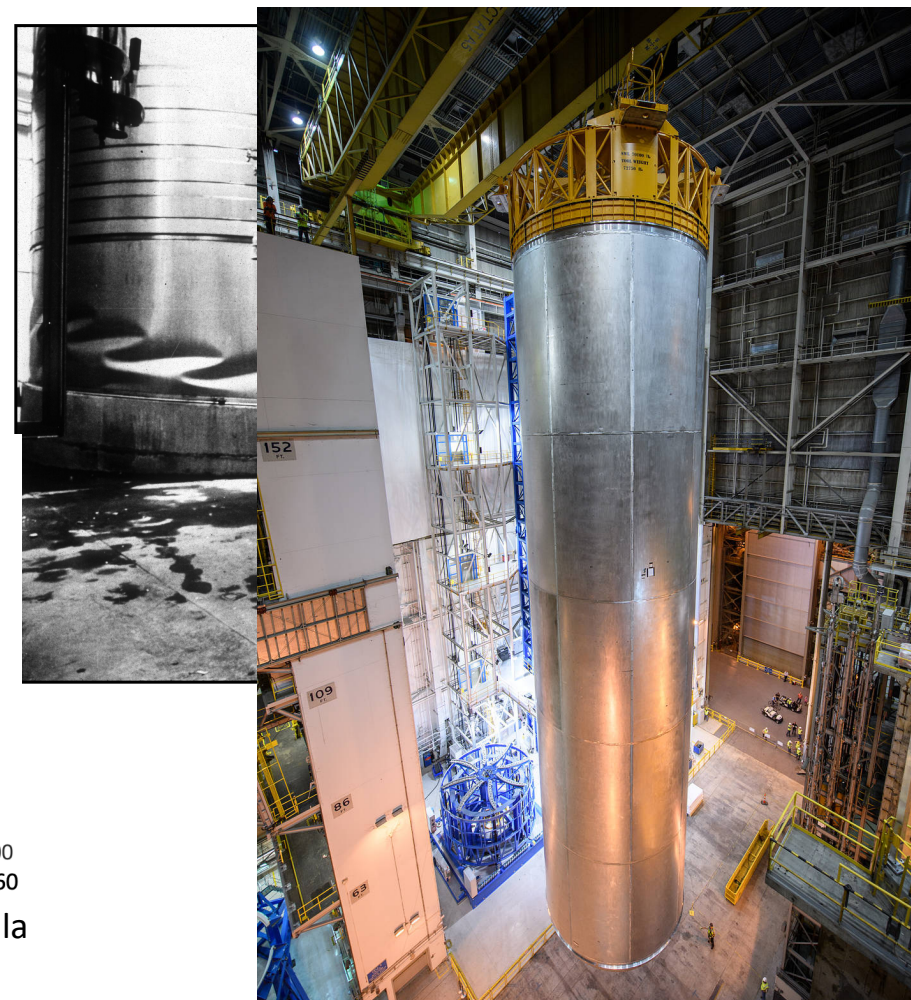


$$\sigma_{crit-shell} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R}$$

t : épaisseur paroi. R : rayon du cylindre.
 E : module de Young. ν : ratio de Poisson



Petit défauts réduisent beaucoup la contrainte critique pour flambage



Semaine 10b –partie 3

Objectifs d'apprentissage de cette partie

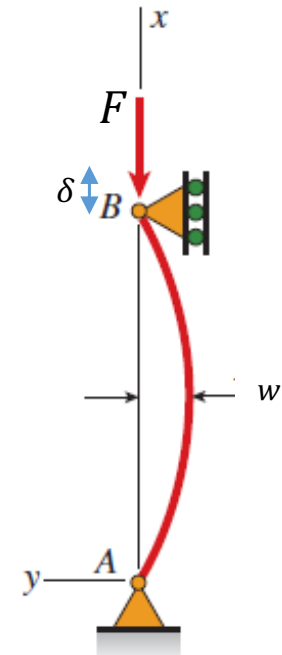
- Flambage- calcul par l'énergie
- Bistabilité de poutres
- Flambage par expansion thermique
- Flambage pour poutre à faible élancement

Flambage – calcul par l'énergie

- L'énergie stockée dans une poutre qui a flambé suite à une charge axiale :

$$\begin{aligned}
 U_{tot} &= U_{mécanique} + U_{charge} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x)^2 dx + F\delta
 \end{aligned}$$

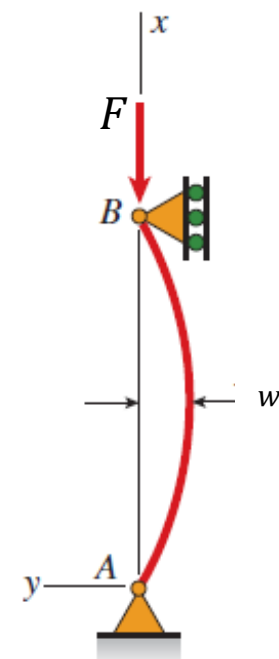
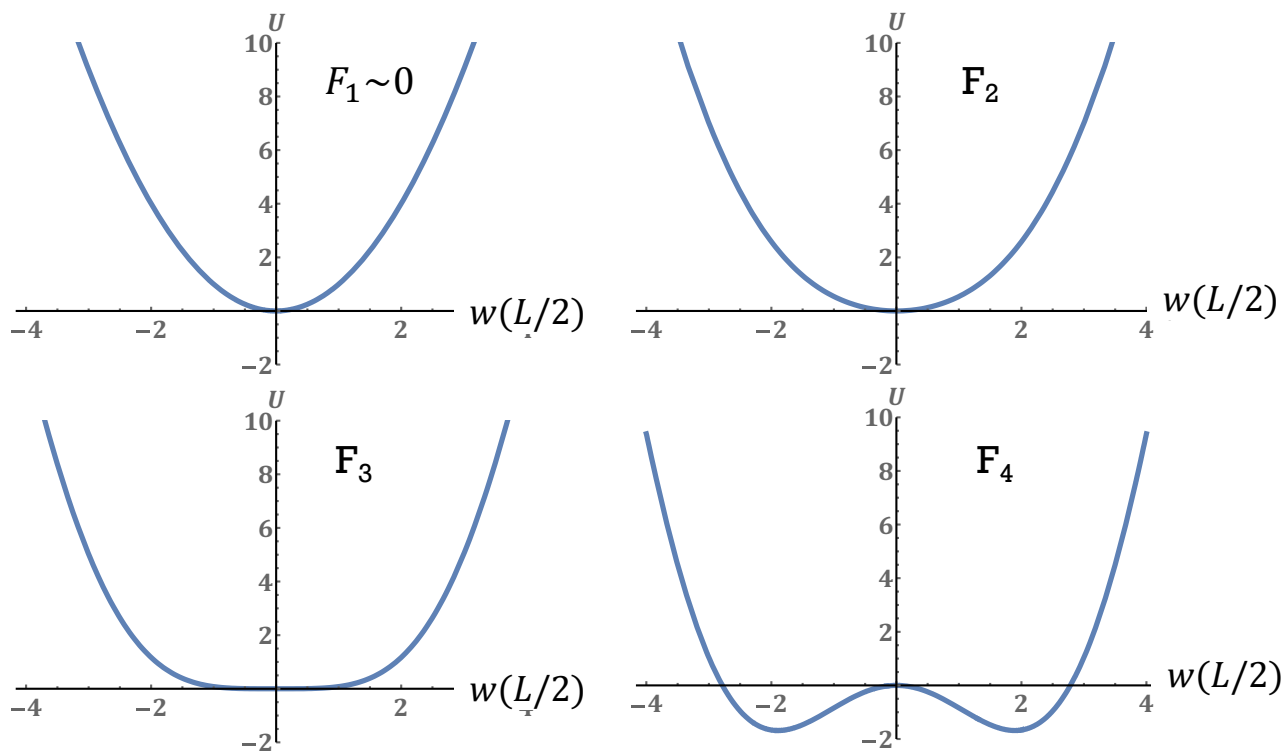
- δ : déplacement selon x du Point B
- Pour une petite charge F , la situation stable est $w = 0$ et donc $\delta = 0$ (sauf petite déformation due à compression du matériau)
- Lorsque F augmente, $w = 0$ devient un maximum local d'énergie, et des solutions stables apparaissent avec $\delta > 0$ (modes en flambage)
- On calcule U_{tot} et cherche les minima et maxima
- Ça donne les flèches après flambage



Flambage – calcul par l'énergie

$$U_{tot} = U_{m\acute{e}canique} + U_{charge}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x)^2 dx + F \delta$$

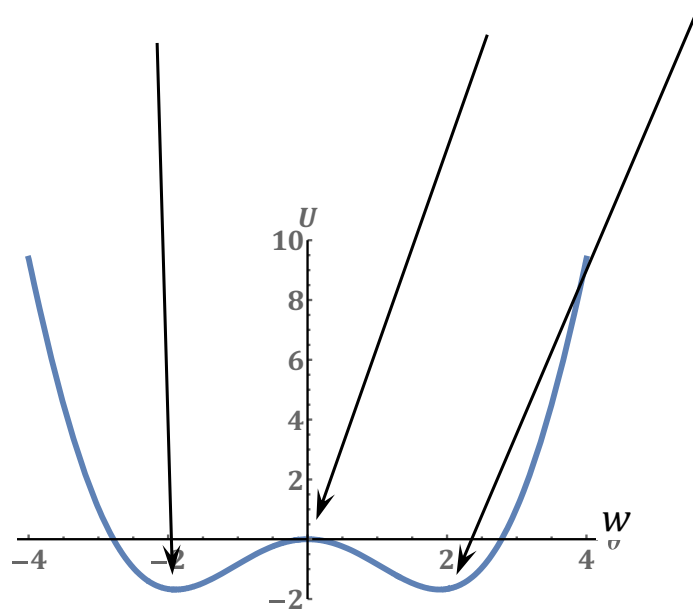


$$F_{sys} = \frac{dE}{dw} \quad k_{sys} = \frac{dF}{dw}$$

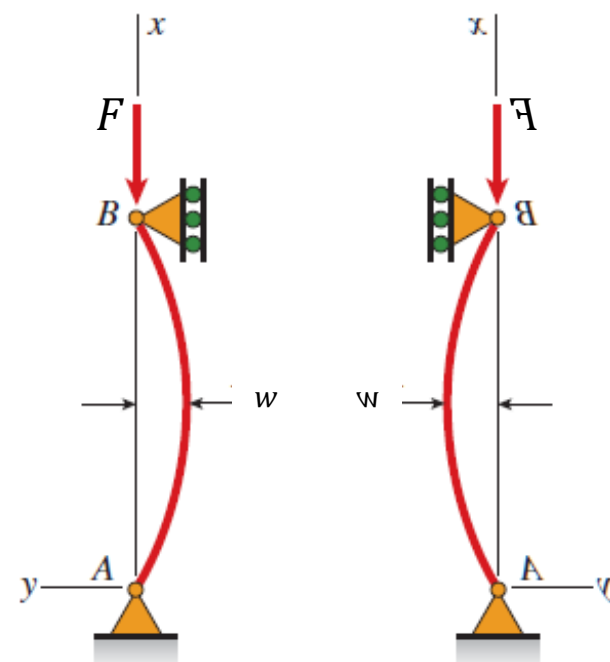
$$F_1 < F_2 < F_3 < F_4$$

Bistables

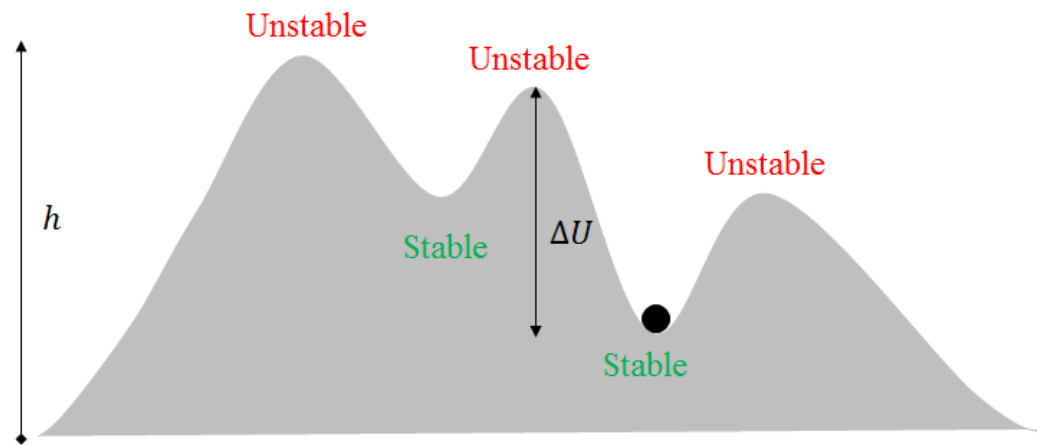
position stable position instable position stable



$$F_{sys} = \frac{dE}{dw} \quad k_{sys} = \frac{dF}{dw}$$

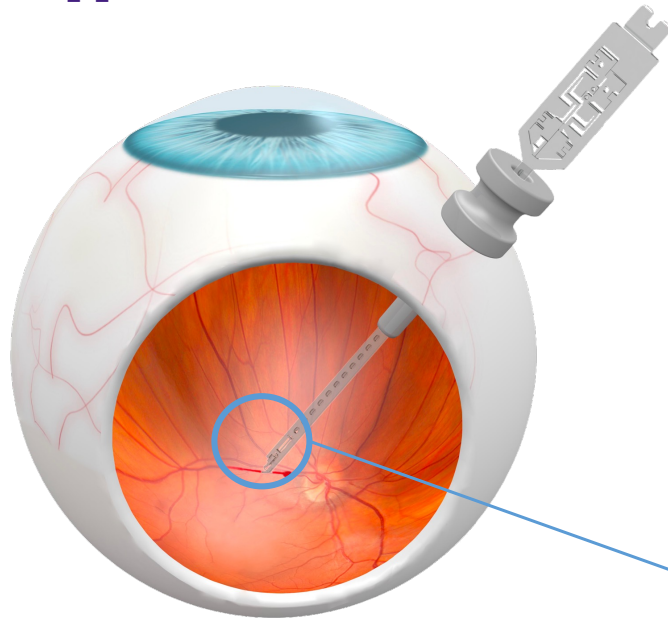


Bistables



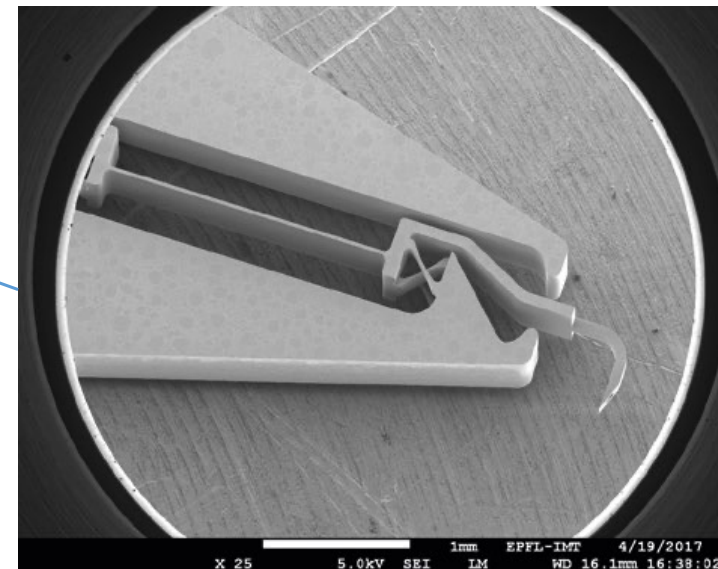
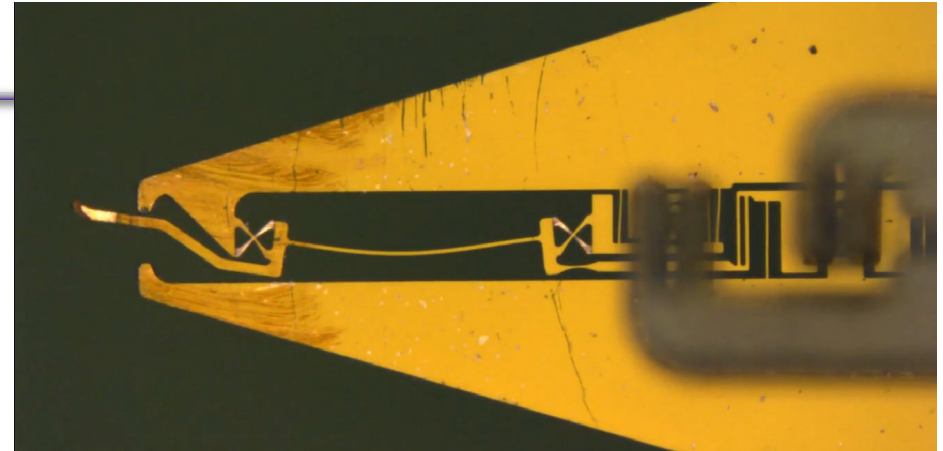
Systèmes Bistables

Applications médicales:



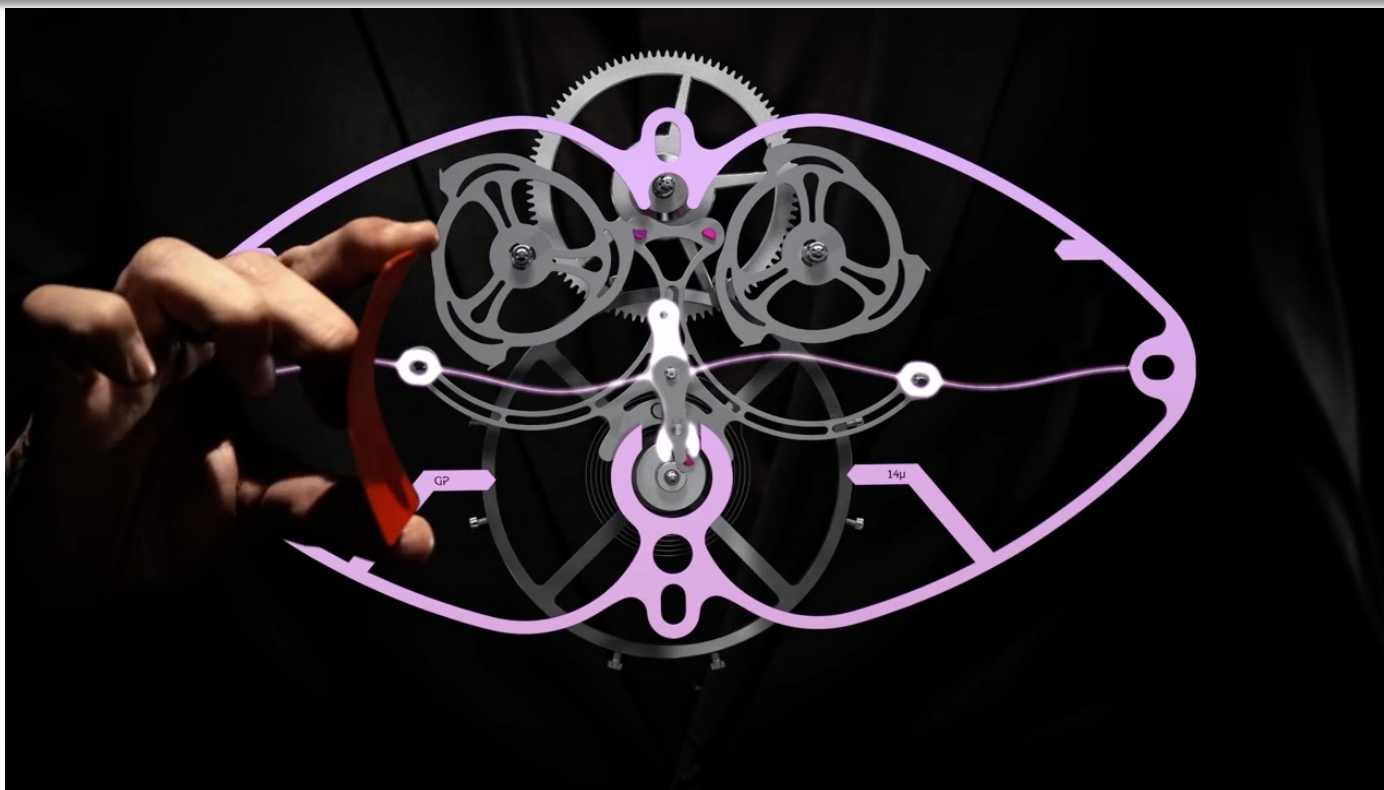
Un outil qui perce une veine rétinienne pour injecter des produits pour éliminer une occlusion
(labos S. Henein et Y. Bellouard)

Usiné en verre!!!



Bistables en horlogerie (GP constant escapement)

<https://www.youtube.com/watch?v=MQJFRt-2hDk>



«whatever the energy of the barrel, the escapement will transmit a constant energy to the regulator (or balance). In order to do so, the idea was to integrate a silicon intermediary device into the escapement which contained an extremely thin blade, accumulating energy up to a threshold close to instability; always the same. It then transmits this energy completely ...»

<https://www.girard-perregaux.com/en/bridges/constant-escapement-lm-93505-21-631-ba6e>

Effet de la Température



Flambage

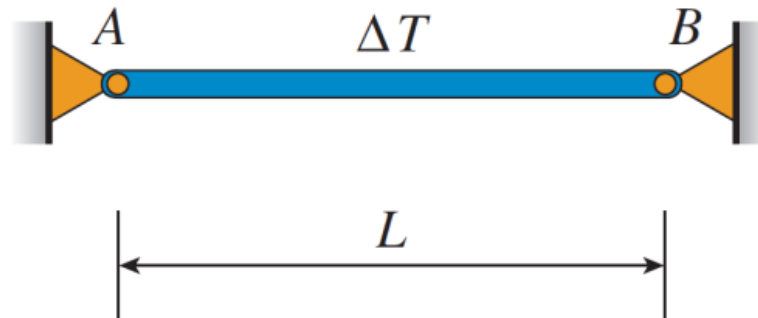
Effet de la Température

- Si $\alpha \Delta T > 0$, cette “expansion” provoque une contrainte compressive dans la poutre
- Si cette contrainte est trop élevée, il y aura flambage.

$$\sigma_{crit,Thermal} = \alpha \cdot \Delta T \cdot E = \pi^2 E \left(\frac{r}{L_{eff}} \right)^2$$

$$\Delta T_{flamb} = \frac{\pi^2}{\alpha} \left(\frac{r}{L_{eff}} \right)^2$$

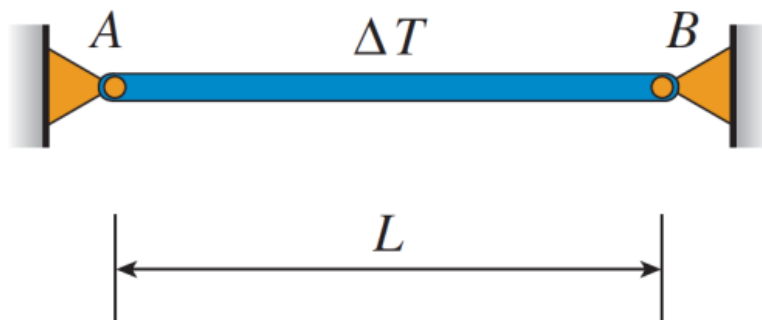
ΔT pour flambage ne depend pas de E!



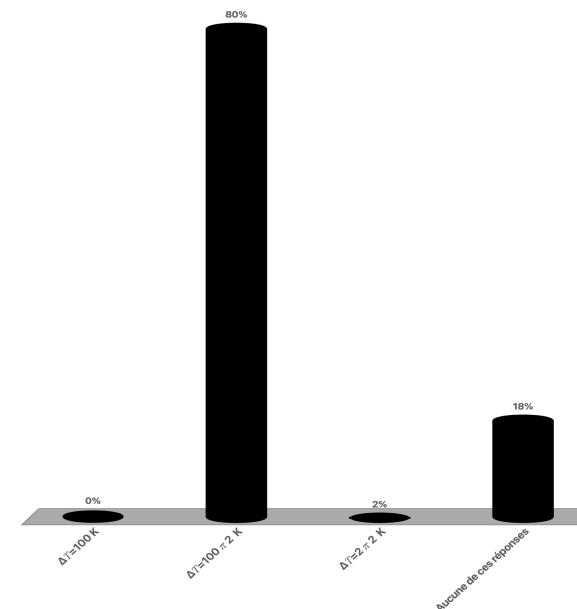
$L/r = 100$; $\alpha = 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $E = 200 \text{ GPa}$

Quel ΔT pour flambage?

- A. $\Delta T = 100 \text{ K}$
- B. $\Delta T = 100\pi^2 \text{ K}$
- C. $\Delta T = 2\pi^2 \text{ K}$
- D. Aucune de ces réponses



$$\Delta T_{\text{flamb}} = \frac{\pi^2}{\alpha} \left(\frac{r}{L_{\text{eff}}} \right)^2$$



A. $\Delta T = 100 \text{ K}$

B. $\Delta T = 100\pi^2 \text{ K}$

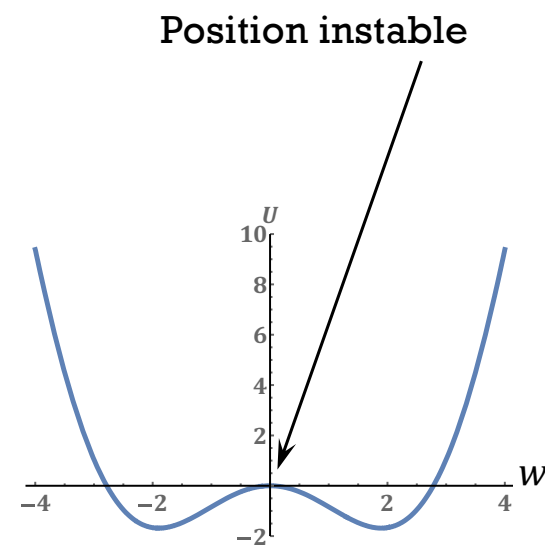
C. $\Delta T = 2\pi^2 \text{ K}$

D. Aucune de ces réponses

flambage – déformation plastique



Canette: déformation plastique suite au flambage



Flambage de poutres “pas minces”

(faible coefficient d'élancement, L/r pas $\gg 1$)

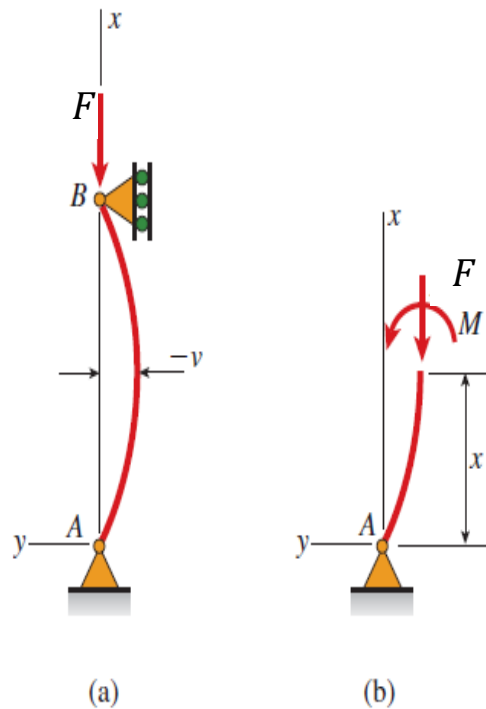


<https://www.youtube.com/watch?v=jNwvub87l8o>

Flambage

Faible coefficient d'élanement

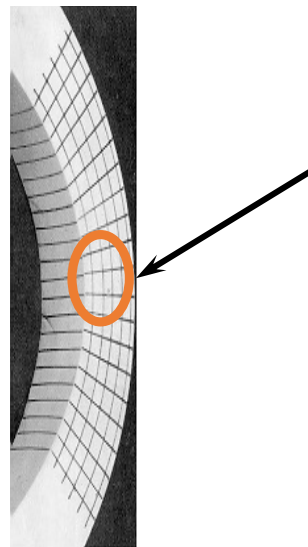
- Contrainte $\sigma(x, y)$ = dans une poutre qui se plie soumise à une force axiale F



$$M(x) = -Fw(x)$$

$$\sigma_{courbure}(x, y) = \frac{Fw(x)}{I} (y - y_0)$$

$$\sigma_{comp,Max,courbure} = \frac{F t}{2 I} w(x)$$



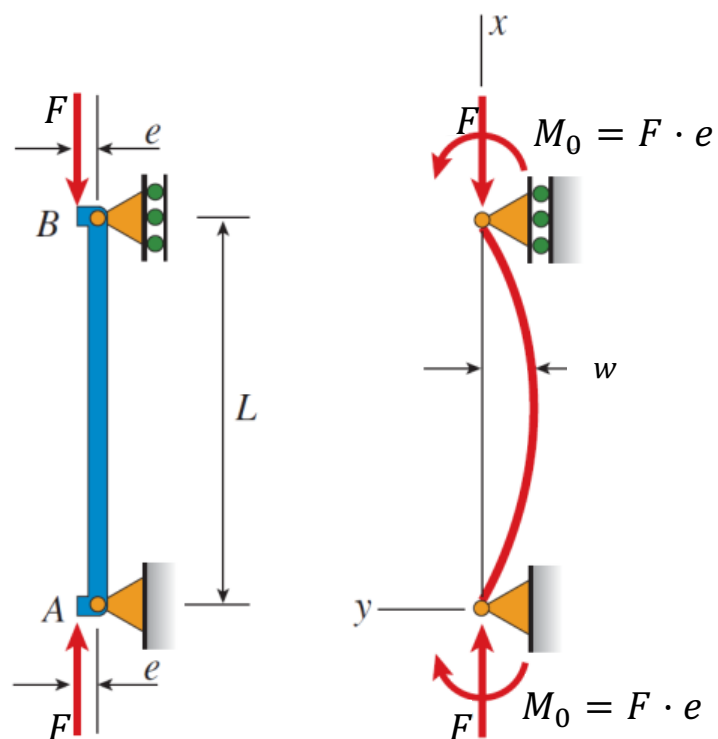
Si t/I est grand, défaillance par déformation plastique car forte contrainte due à la courbure.

Semaine 10b – partie 4

Objectifs d'apprentissage de cette partie

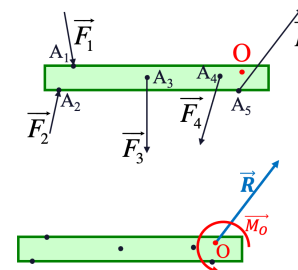
- Calculer la contrainte max dans une poutre avec charges excentriques

Flambage avec des charges **excentriques**



- Jusqu'à présent, la force/charge passait par le centroïde de la poutre
- Mais en pratique, la charge est souvent décalée de cet axe : chargement excentrique. Décalage e
- Nous pouvons modéliser l'excentricité avec une **charge axiale F** et un **moment M_0 au support au point B**
 - Force externe en B: $F = F$
 - Moment externe en B: $M_0 = F \cdot e$

Tout ensemble de forces peut être réduit à 2 éléments



Force Résultante (en O)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

et

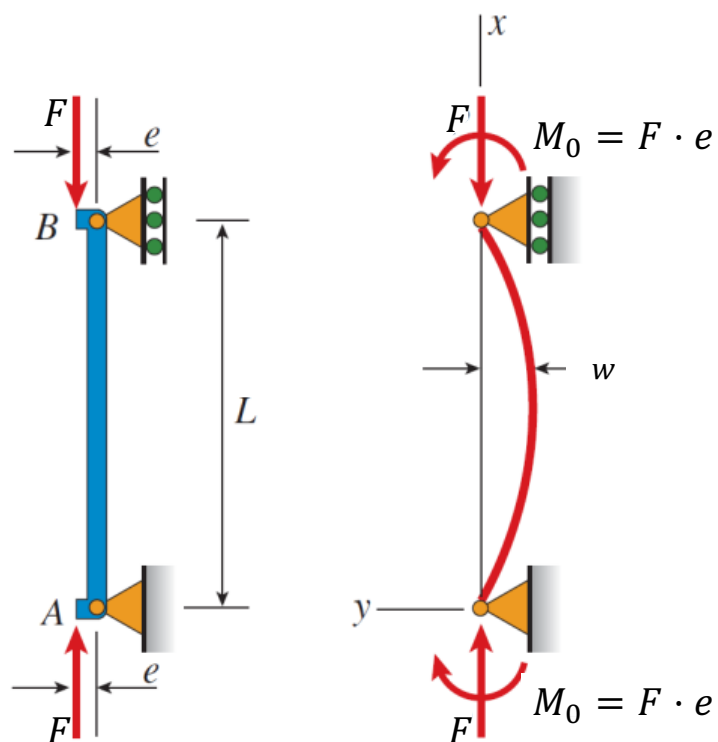
$$\vec{M}_O = \sum (\vec{OA}_i \times \vec{F}_i)$$

(ce moment dépend du choix de O)

Le choix du point O est arbitraire
Mais attention: $\vec{M}_O$ dépend de O !

Flambage

Charges excentriques



Avec une charge excentrique, la poutre se déforme même sous de petites charges (car moments aux extrémités)

Moment de flexion $M_z(x)$ dans la poutre

$$M_z(x) = F \cdot e - Fw(x)$$

Equation différentielle inhomogène:

$$EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = M_z(x)$$

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \frac{F}{EI} w(x) = \frac{F}{EI} e$$

Flambage

Charges excentriques

- Flèche, une fois l'équation résolue:

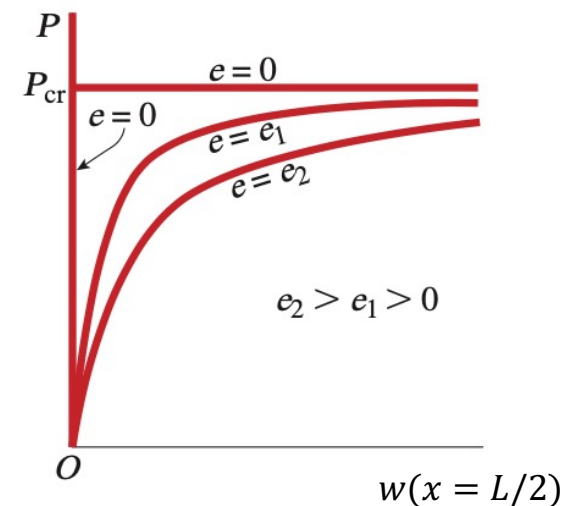
$$w(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + e$$

- Conditions aux bords pour trouver C_1 et C_2 :

$$w(x=0) = 0$$

$$w(x=L) = 0$$

$$w(x) = -e \left(\tan\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) - 1 \right)$$



Si $e = 0$ on a

$$w(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

ou $w(x) = 0$

Flambage avec charge excentrique

formule secant ($1/\cos$)

- La flèche maximale de cette poutre est au milieu (à $x = L/2$).
- C'est à ce point, **avant le flambage**, que le moment interne et la flèche sont maximaux, pour un F donné:

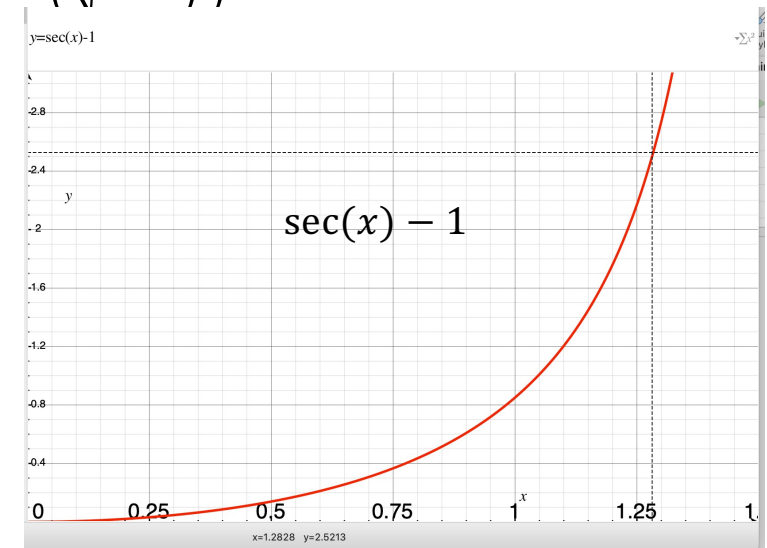
$$|w|_{max} = \left| w \left(\frac{L}{2} \right) \right| = e \left(-1 + \cos \left(\sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) + \tan \left(\sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) \sin \left(\sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) \right) =$$

$$= e \left(\frac{1}{\cos \left(\sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right)} - 1 \right)$$

$$|w|_{max} = e \left(\sec \left(\sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right)$$

(Si $e = 0$, on retombe sur $w = 0$)

$$\sec(x) = 1/\cos(x)$$



Flambage avec charge excentrique

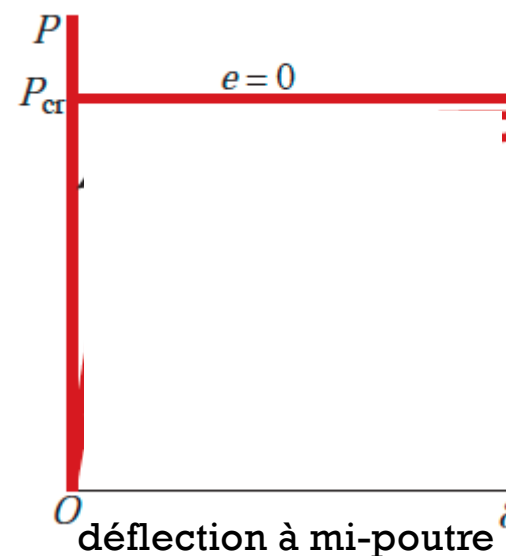
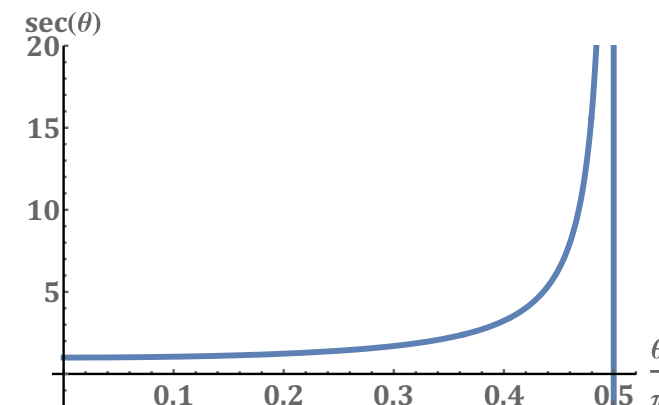
$$|w|_{max} = e \left(\sec \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right)$$

- la fonction $\sec(\theta)$ tend vers l'infini pour $\theta = \frac{\pi}{2}$
- Cela détermine une valeur critique de la charge où $w(x)$ serait « infini »:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_{crit}}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$F_{crit} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

c'est le même F_{crit} que charge non-excentrique!
mais la déflexion commence pour tout $F > 0$



Flambage avec charge excentrique

Quelle est la Contrainte maximale?

- Moment de flexion : $M_z(x) = F \cdot e - Fw(x)$

$$M_{max} = Fe + F|w|_{max}$$

$$|w|_{max} = e \left(\sec \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right)$$

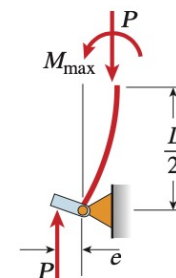
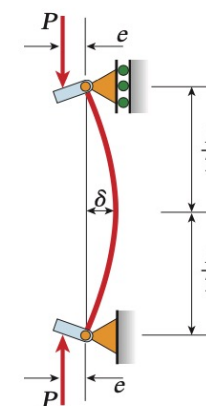
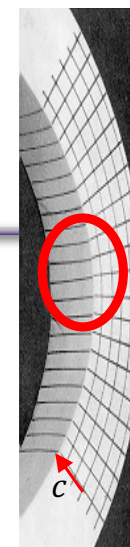
$$M_{max} = F \cdot e \sec \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2} \right) = F e \sec \left(\sqrt{\frac{F}{F_{crit}}} \frac{\pi}{2} \right)$$

- Contrainte maximum est **compressive**:

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} - \frac{M_{max} \cdot c}{I}$$

rappel: c est la distance maximale à l'axe neutre (en y).

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{A}{I} e \cdot c \cdot \sec \left(\sqrt{\frac{F}{F_{crit}}} \frac{\pi}{2} \right) \right)$$



$|\sigma_{max,compression}| > |\sigma_{max,traction}|$ car force axiale compressive

Flambage avec charge excentrique

(comparer à slide 25)

- Contrainte compressive maximum (côté concave) exprimée en fonction du rayon de giration r en fonction de charge F

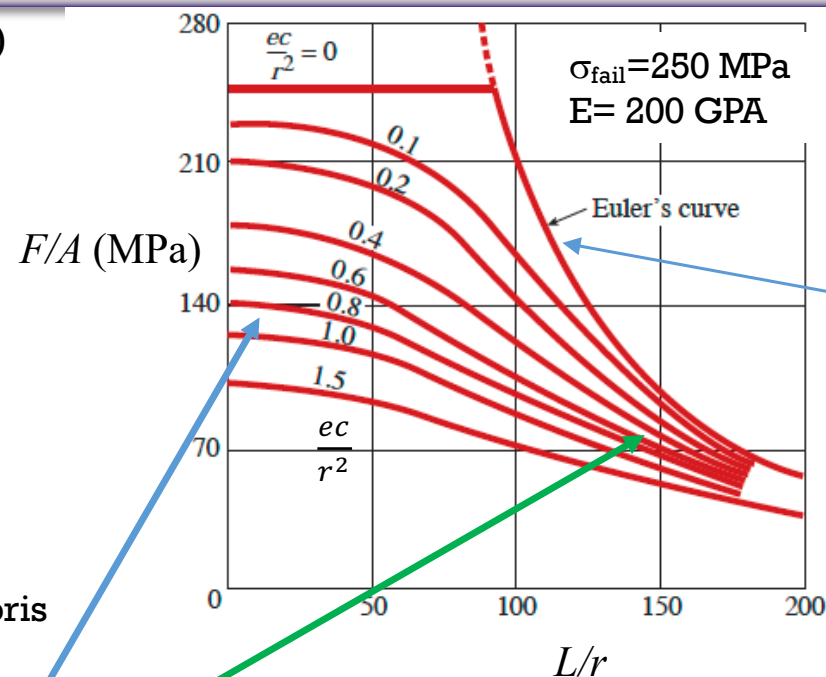
$$r^2 = \frac{I}{A}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{F}{EA}} \frac{L}{2r} \right) \right)$$

où $\frac{ec}{r^2}$ est le rapport d'excentricité, typiquement compris entre 0 et 3, mais souvent < 1 .

La charge excentrique a un effet relatif plus prononcé sur les poutres peu élancées.

La contrainte maximum (la charge externe max avant défaillance) décroît quand L/r augmente



$$\begin{aligned} \sigma_{crit, e=0} &= \pi^2 \frac{EI}{AL^2} \\ &= \pi^2 \frac{E}{(L/r)^2} \end{aligned}$$

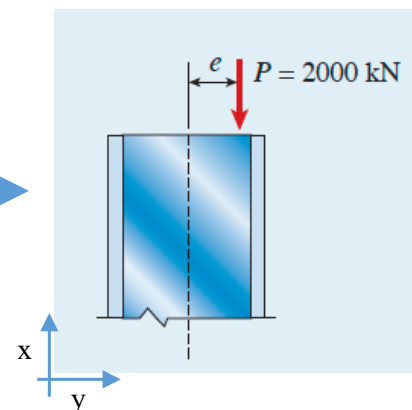
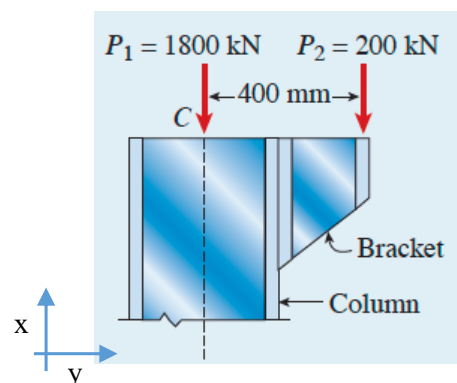
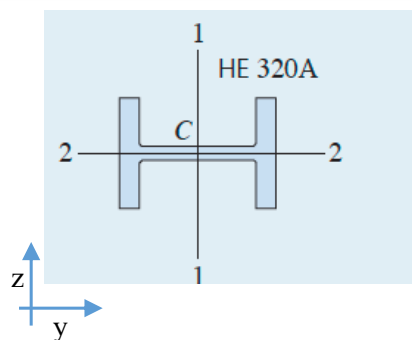
courbes avec $\sigma_{max} = \sigma_{fail}$

La charge F doit être choisie pour être en-dessous de la ligne rouge



Exemple charge excentrique

Trouver la contrainte compressive maximum dans cette poutre pour la charge imposée



On trouve e qui donne le même moment des forces en C que les 2 forces

Une poutre en acier de longueur 7,5 m.

On trouve les valeurs de géométrie dans des tableaux pour une poutre H 320A

$$A = 124.4 \text{ cm}^2 \quad r = 13.58 \text{ cm} \quad c = \frac{310 \text{ mm}}{2} = 155 \text{ mm}$$

On applique la formule

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{F}{EA}} \frac{L}{2r} \right) \right) = 236 \text{ MPa}$$

Et on compare au limite pour le matériau (mais c'est une grande contrainte)

-
- **Les longues poutres avec un grands L/r : flambage à faible contrainte**
 - **Les courtes poutres avec un faible L/r : défaillance par rupture du matériau**
 - **Les poutres intermédiaires: défaillance par flambage plastique**

-
- Fin de la matière avec Herbert Shea
 - Vous pouvez me poser des questions par mail, ou prendre rdv pour parler sur zoom (avec moi ou un assistant). Svp n'hésitez pas!
 - Bon courage!